

Schlussbericht vom 30.11.2022

zu IGF-Vorhaben Nr. 21080 N

Thema

Experimentelle Untersuchungen und Erweiterung der kontinuumsmechanischen Modellierung von Elastomerschäumen

Berichtszeitraum

01.03.2020-31.05.2022

Forschungsvereinigung

Deutsche Kautschuk-Gesellschaft e.V. - DKG

Forschungseinrichtung(en)

Deutsches Institut für Kautschuktechnologie e.V.

Universität Siegen, Fakultät IV, Department Maschinenbau, Lehrstuhl für Festkörpermechanik

Gefördert durch:

Zusammenfassung

Das Projekt „Experimentelle Untersuchungen und Erweiterung der kontinuumsmechanischen Modellierung von geschäumten Elastomeren“ mit der IGF-Vorhaben Nr. 21080 N beinhaltete sowohl eine mikro- als auch eine makromechanische Herangehensweise zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Elastomerschäumen. Das übergeordnete Ziel war die Bestimmung des makroskopischen Materialverhaltens unter der Kenntnis relevanter mikrostruktureller Größen. Dazu wurde ein kontinuumsmechanisches Materialmodell auf Basis des sogenannten Danielsson-Ansatzes entwickelt, bei welchem als Mikrostrukturkennwerte neben der Porosität auch die Porenform und -ausrichtung eingehen. Die Mikrostruktur wurde hierbei anhand von Computertomographieaufnahmen durch Bildverarbeitungsmethoden analysiert. Neben der softwaretechnischen Implementierung des Materialmodells und der Strukturcharakterisierung stand zudem die experimentelle mechanische Charakterisierung unterschiedlicher Matrixmaterialien unter Berücksichtigung von viskoelastischen Einflüssen und Erweichungseffekten im Vordergrund. Diese dienten zur Materialparameteranpassung der entwickelten und genutzten Materialmodelle. Die entsprechenden Versuche an geschäumten Elastomeren aus Industrie- und Eigenproduktion wurden zur Validierung und Bewertung des entwickelten Materialmodells genutzt. Anhand von Bauteilsimulationen einer Dichtung der Meteor GmbH und Tischtennisschlägerbelägen der Firma ESN konnte die Anwendbarkeit des Modells für industrielle Fragestellungen bewiesen werden.

Das Ziel des Forschungsvorhabens wurde erreicht.

Danksagung

An dieser Stelle möchten wir uns für die Unterstützung des Projektes bei den Unternehmen des projektbegleitenden Ausschusses herzlich bedanken. Trotz des überwiegend digitalen Austausches fanden rege informative Diskussionen statt, welche uns sehr dabei unterstützen, die Projektziele zu erreichen. Im Einzelnen geht der Dank an *Albrecht Bäumer GmbH & Co. KG, Cooper Standard GmbH, DIK Prüfgesellschaft mbH, ESN Deutsche Tischtennis Technologie GmbH, Ford-Werke GmbH, IWF Ingenieurbüro, Ludwig Nano Präzision GmbH, material predictions GmbH, MSC.Software GmbH, Schüco International KG* und die *Meteor GmbH*.

Inhalt

Thema.....	1
Berichtszeitraum.....	1
Forschungsvereinigung	1
Forschungseinrichtung(en).....	1
Zusammenfassung.....	2
Danksagung	2
1 Einleitung	5
2 Projektziele.....	6
3 Stand der Technik, Voruntersuchungen und theoretische Grundlagen	7
3.1 Mikrostrukturcharakterisierung	7
3.2 Erzeugung von repräsentativen Volumenelementen	11
3.3 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	15
3.4 Materialmodelle für geschäumte Elastomere.....	17
4 Durchgeführte Arbeiten und Ergebnisse im Berichtszeitraum.....	19
4.1 AP 2: Mischungs- und Prüfkörperherstellung, Mechanische Charakterisierung (DIK + PbA + Siegen)	19
4.1.1 Polymertypen und Vernetzungssysteme	19
4.1.2 Bauteilherstellung.....	21
4.1.3 Mechanische Charakterisierung an Prüfkörpern - Quasistatische Belastungen ...	22
4.1.4 Mechanische Charakterisierung an Prüfkörpern - Dynamische Belastungen.....	27
4.1.5 Mechanische Charakterisierung an Bauteilen	28
4.2 AP 3: Design und Simulation von Schäumen (Siegen).....	28
4.2.1 Designphase	28
4.2.2 Simulationsphase.....	29
4.3 AP 4: Additive Fertigung repräsentativer Schäume und Experimente (Siegen)	37
4.3.1 Additive Fertigung	37
4.3.2 Experimentelle Untersuchung	38
4.4 AP 5: Mikroskopische Untersuchungen (Siegen).....	39
4.4.1 Computer-Tomographische und Auflichtmikroskopie-Untersuchungen	39
4.4.2 Auswertung CT-Untersuchungen	42
4.4.3 Auswertung Auflichtmikroskopie.....	48
4.5 AP 6: Kontinuumsmechanische Modellierung (DIK)	50
4.5.1 Modellierung der Mikrostruktur des Schaums.....	50
4.5.2 Materialmodell für die Elastomermatrix	52
4.5.3 Danielssons Ansatz.....	59

4.5.4	Parameteridentifikation.....	84
4.5.5	Modellvalidierung	89
4.6	AP 7: Bauteiluntersuchungen und -simulation (DIK + PbA)	93
4.6.1	Geschäumte Dichtung der Meteor GmbH.....	93
4.6.2	Tischtennisschlägerbeläge der ESN GmbH	98
5	Wissenschaftlich-technischer und wirtschaftlicher Nutzen	103
6	Verwendung der Zuwendung	105
7	Notwendigkeit und Angemessenheit der geleisteten Arbeit	106
8	Plan zum Ergebnistransfer in die Wirtschaft	106
9	Literatur.....	110

Projektbearbeitung und Projektbericht:

Forschungsstellen: Deutsches Institut für Kautschuktechnologie e.V.

Eupener Straße 33

30519 Hannover

(im Weiteren mit (DIK) gekennzeichnet)

Universität Siegen, Fakultät IV, Department Maschinenbau,

Lehrstuhl für Festkörpermechanik

Paul-Bonatz-Straße 9-11

57076 Siegen

(im Weiteren mit (Siegen) gekennzeichnet)

Hauptbearbeiter: Sebastian Siebert (DIK), Stefan Buchen (Siegen)

Beteiligt: Dr.-Ing. Oliver Gehrmann (DIK), Andreas Fehse (DIK),
Dr. rer. nat. Jens Meier (DIK)

Dr.-Ing. Nils Hendrik Kröger (DIK), Dr.-Ing. Thomas Reppel (Siegen)

Projektleitung: Dr.-Ing. Patrick Schneider (DIK), Prof. Dr.-Ing. Kerstin Weinberg (Siegen)

1 Einleitung

Elastomerschäume werden in diversen Branchen als technische Komponenten von Dichtungssystemen und diversen anderen Produkten zur Wärme- Schwingungs- und Schallisolation verwendet. Die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten lassen sich durch das gute Rückstellvermögen, gute thermische und akustische Isolationseigenschaften, dem geringen Eigengewicht und flexibler Verarbeitungsmöglichkeiten erklären. Anhand ihrer Porenstruktur lassen sich geschäumte Elastomere in geschlossen-, gemischt- und offenzellige Strukturen klassifizieren. Einen groben Richtwert liefert die relative Massendichte R , welche durch das Verhältnis zwischen effektiver Schaumdichte und der Dichte des Zellwandmaterials definiert ist. Für Elastomerschäume mit einer relativen Dichte kleiner als 0,3 ergibt sich gewöhnlicherweise eine offenporige Struktur, wohingegen eine relative Dichte größer als 0,7 auf eine geschlossenporige Struktur hinweist. Während für Dichtungssysteme z.B. von Autotürdichtungen eher geschlossene Poren sinnvoll sind, werden für Systeme der Schwingungsentkopplung auch offenzellige Strukturen verwendet. Bei beiden strukturellen Grenzfällen definiert sowohl das Matrixmaterial als auch die Mikrostruktur das mechanische Verhalten eines belasteten Bauteils. Durch eine genaue Kenntnis des Einflusses der Schaumtopologie auf das mechanische

Verhalten können geschäumte Elastomere zielgerichteter an ihr Anforderungsprofil angepasst werden.

Grundsätzlich existieren zwei Betrachtungsweisen zur Berechnung des Verformungsverhaltens eines Elastomerschaums mittels der Finiten-Element-Methode (FEM). Ein mikromechanischer Ansatz ermöglicht eine detaillierte Spannungs-Dehnungsberechnung der Struktur eines kleinen Materialausschnittes. An diesen auch als repräsentative Volumenelemente (RVE) bezeichneten Ausschnitten kann der Einfluss der Schaumtopologie genau nachvollzogen werden und die zugrundeliegenden mikroskopischen Effekte beobachtet werden. Dies wird zumeist im Rahmen der FE^2 -Methode realisiert, bei der das RVE-Randwertproblem neben dem makroskopischen Randwertproblem mit der FEM gelöst wird. Für eine umfassende Bauteilberechnung eignet sich dieser Ansatz jedoch nicht, da der hohe Berechnungsaufwand, der von der feinen Geometrieauflösung verursacht wird, eine Anwendung für die meisten KMU unwirtschaftlich macht. Demgegenüber ermöglicht eine makroskopische Herangehensweise eine effiziente und schnelle Auslegung von ganzen geschäumten Bauteilen mittels FE-Simulationen. Durch die Verwendung von Strukturparametern wie beispielsweise der relativen Dichte R (bzw. der Porosität $\phi = 1 - R$) kann der mikrostrukturelle Einfluss auf das makromechanische Deformationsverhalten in einer gemittelten Form berücksichtigt werden. Indem der Einfluss unterschiedlicher Mikrostrukturen bereits im virtuellen Entwicklungsprozess untersucht werden kann, reduziert das in diesem Projekt entwickelte kontinuumsmechanische Materialmodell die Entwicklungszeiten – und kosten der KMU.

Bei der Produktentwicklung entfällt die sehr aufwändige Herstellung und mechanische Charakterisierung einzelner Mikrostrukturen. Lediglich zur Validierung der Modellvorhersage sollten noch experimentelle mechanische Untersuchungen an ausgewählten geschäumten Proben durchgeführt werden.

2 Projektziele

Diesem Projekt standen folgende Ziele voran:

- Die zuverlässige Charakterisierung der Mikrostruktur von geschäumten Elastomeren über verschiedene bildgebende Verfahren
- Die Bestimmung relevanter Mikrostrukturparameter, welche die makroskopischen mechanischen Eigenschaften eines Schaums maßgeblich beeinflussen
- Die Entwicklung eines kontinuumsmechanischen Materialmodells, dass sowohl den Mikrostruktureinfluss als auch inelastische Effekte des Matrixmaterials berücksichtigt
- Die Implementierung des Materialmodells in eine kommerzielle FE-Software, so wie eine anschließende Bauteilberechnung und experimentelle Validierung

Als bildgebende Methode zur Strukturanalyse dient seit Jahrzehnten die Mikro-Computertomographie als Standardverfahren in der Forschung und Industrie. Die automatisierte Auswertung der generierten Daten ist jedoch weiterhin Gegenstand zahlreicher, aktueller Forschungsprojekte.

Ein vielversprechendes Verfahren zur Bildauswertung ist das Konzept der intrinsischen Volumina, welches in dem Buch „3D Images of Materials Structures: Processing and Analysis“ von Ohser und Schladitz [1] vorgestellt wird. In diesem Projekt wird dieses Konzept genutzt, um sowohl Industrieschäume als auch Eigenherstellungen mikrostrukturell zu charakterisieren. Durch eine

virtuelle Nachbildung der untersuchten Schäume, sogenannte topologisch äquivalente Schäume, kann der Einfluss der Schaumstruktur durch eine Finite-Elemente-Analyse bestimmt werden und somit relevante mikrostrukturelle Größen identifiziert werden, welche das makroskopische Materialverhalten maßgeblich beeinflussen.

Das entwickelte kontinuumsmechanische Modell baut auf der Arbeit „Constitutive modeling of porous hyperelastic materials“ von Danielsson, Parks und Boyce [2] auf. Der darin beschriebene Ansatz idealisiert die Mikrostruktur des Schaums als Hohlkugel mit einem hyperelastischen Materialverhalten. Durch die analytische Berechnung der Kinematik einer deformierten Hohlkugel kann ein makromechanisches Materialmodell abgeleitet werden. Dieser isotrope Ansatz wird im Projekt auf Schäume erweitert, welche aufgrund der Mikrostruktur ein anisotropes Verhalten zeigen. Zusätzlich wird dem Matrixmaterial ein allgemeingültigeres Materialmodell zugeordnet, welches Effekte wie Materialerweichung, Setzverhalten und viskose Einflüsse berücksichtigt. Die Implementierung des Modells erfolgt in die FE-Programme *MSC Marc* und *Simulia ABAQUS* über diverse Schnittstellen zur Einbindung von Subroutinen. Im Rahmen der Nutzung kommerzieller FE-Software, kann das entwickelte Modell schließlich zur Vorhersage von beliebig belasteten realen Bauteilen verwendet werden.

3 Stand der Technik, Voruntersuchungen und theoretische Grundlagen

3.1 Mikrostrukturcharakterisierung

Die Ermittlung der Strukturparameter von Elastomerschäumen, wie z.B. die Porosität ϕ , die spezifische Ligamentlänge L_V oder die Durchmesser einzelner Poren d_i , lassen sich mit dem Konzept der intrinsischen Volumina aus Computertomographieaufnahmen zuverlässig bestimmen. Eine ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Theorie und deren Anwendung wurde im Rahmen dieses Projektes in einem frei zugänglichen wissenschaftlichen Artikel „Microstructure characterization and stochastic modeling of open-cell foam based on μ CT-image analysis“ [3] veröffentlicht. Im Folgenden werden die wesentlichen Aspekte der Publikation allgemein verständlich erläutert.

Die intrinsischen Volumina sind im Dreidimensionalen, vier voneinander unabhängige topologische Größen, aus denen sich eine Vielzahl von weiteren geometrischen Parametern bestimmen lassen. Die Euler-Charakteristik χ , welche Aussagen über die innere Verbundenheit eines Körpers zulässt, ist dabei das wichtigste intrinsische Volumen, da dieses intrinsische Volumen insbesondere in der lokalen Gitterzellen basierenden Berechnung benötigt wird. Die weiteren Volumina sind das Integral der mittleren Krümmung M , die Oberfläche S und das Volumen V des Körpers. Gewöhnlich werden diese topologischen Größen auf das Gesamtvolumen des untersuchten Materialausschnitts bezogen und erhalten dadurch zusätzlich den Index V . Aus diesen Charakteristiken lassen sich nun die Porosität $\phi = 1 - V_V$, die spezifische Ligamentlänge $L_V = M_V / (\pi \phi)$ oder auch die Knotendichte für offenporige Schäume $N_V = -\chi_V$ bestimmen. Des Weiteren können mittlere Angaben über den Strebenumfang $\bar{u} = S_V / L_V$, den Strebendurchmesser bei gleichem Kreisumfang $\bar{d}_{eq} = \bar{u} / \pi$ und die Strebenquerschnittsfläche $\bar{a} = V_V / L_V$ berechnet werden. Eine Beschreibung der Gesamtstruktur anhand einer dimensionslosen Kenngröße kann durch den Strukturmodellindex $f_{SMI} = 12 V_V M_V / S_V^2$ ebenfalls durch die intrinsischen Kenngrößen erfolgen.

Um in einem weiteren Schritt einzelne Porendurchmesser bestimmen zu können, wird zunächst der Porenraum segmentiert, d.h. benachbarte Poren, welche sich gegebenenfalls berühren oder schneiden, müssen voneinander separiert werden. Eine solche Segmentierung der Poren lässt sich mit bekannten Methoden der Bildverarbeitung umsetzen, wobei die Wasserscheidentransformation eine zentrale Rolle einnimmt. Der gesamte Algorithmus wird im Weiteren mit Hilfe der Abbildung 3.1 bis Abbildung 3.3 für den ein- und zweidimensionalen Fall erläutert und startet ausgehend von einem Grauwertbild mit der Binarisierung, welcher jedem Volumenelement (Voxel) des Bildes einen schwarzen Wert (0) oder einen weißen Wert (1) zuordnet. Im Eindimensionalen erfolgt der Auswertungsalgorithmus auf den Daten des zweidimensionalen Grauwertbild (CT) entlang der dargestellten roten Linie. Die Definition des Schwellenwertes, also die Grenze oberhalb dessen jedem Grauwert der neue Wert Eins zugewiesen wird, erfolgt nach Otsu's Methode [4]. Als zweiter Schritt folgt eine Distanztransformation, die den Abstand jedes Voxels zum nächsten Voxel mit dem Wert Eins bestimmt. Als Ergebnis ergibt sich in den Porenzentren ein hoher Wert und im Ligament ein geringer Wert. Durch die Bildung des Komplements kehrt sich dieser Sachverhalt um und das erhaltene Distanzfeld (D^k) lässt sich nun als topographisches Höhenprofil interpretieren, deren Täler und Senken nun den Porenzentren und deren Berge und Höhen dem Ligament entsprechen. Die nachgelagerte Wasserscheidentransformation flutet nun das erzeugte Bild, indem ausgehend von den jeweiligen lokalen Minima „Bergseen“ erzeugt werden, deren Pegelstände steigen. Die Grenzen benachbarter Seen, welche mit fortlaufenden Iterationen entstehen, werden Wasserscheiden genannt. Jeder entstandene See entspricht nun der Einflusszone einer Pore, deren exakte Geometrie sich nun durch eine Maskierung mit dem binarisierten Bild (B) ergibt. Aufgrund überflüssiger lokaler Minima, welche sich in Folge der durchgeführten Distanztransformation ergeben, führt der skizzierte Algorithmus jedoch zu einer Übersegmentierung des Porenraums, siehe (W) Abbildung 3.3. Daher wird vor der Wasserscheidentransformation eine adaptive Filterung durchgeführt, welche die überflüssigen Minima entfernt. Diese Filterung basiert auf einer morphologischen Bilderosion. Als Resultat ergibt sich ein segmentierter Porenraum, in dem jede Pore eindeutig identifiziert werden kann.

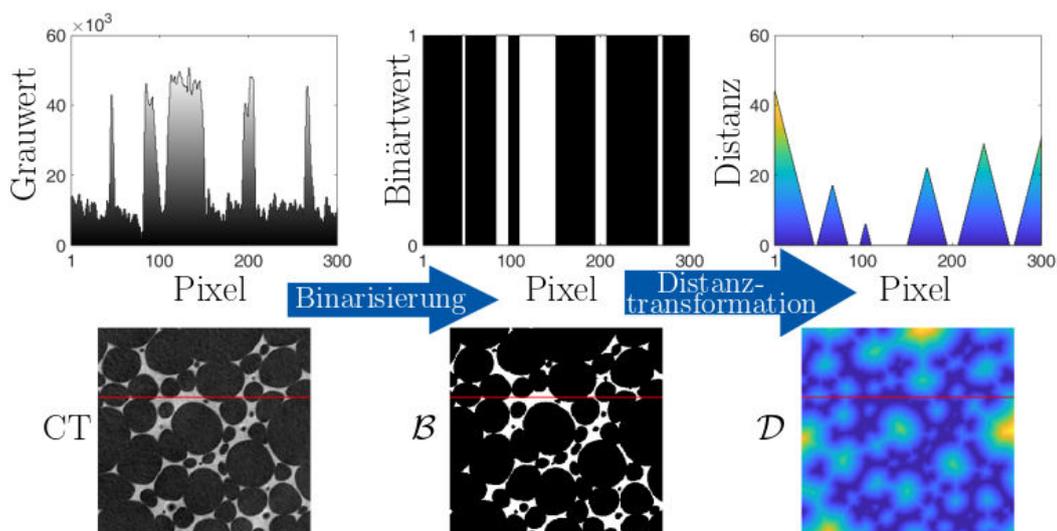


Abbildung 3.1: Darstellung des Porensegmentierungsalgorithmus: Die zweidimensionalen Bilder in der unteren Reihe entsprechen dem original CT-Bild, deren Binarisierung (B) und der Distanztransformation (D); die korrespondierende eindimensionale Analyse ist in der oberen Reihe dargestellt (oben: 1D-Operationen auf Basis von 1D-Daten; unten: 3D-Operationen auf Basis von 3D-Daten)

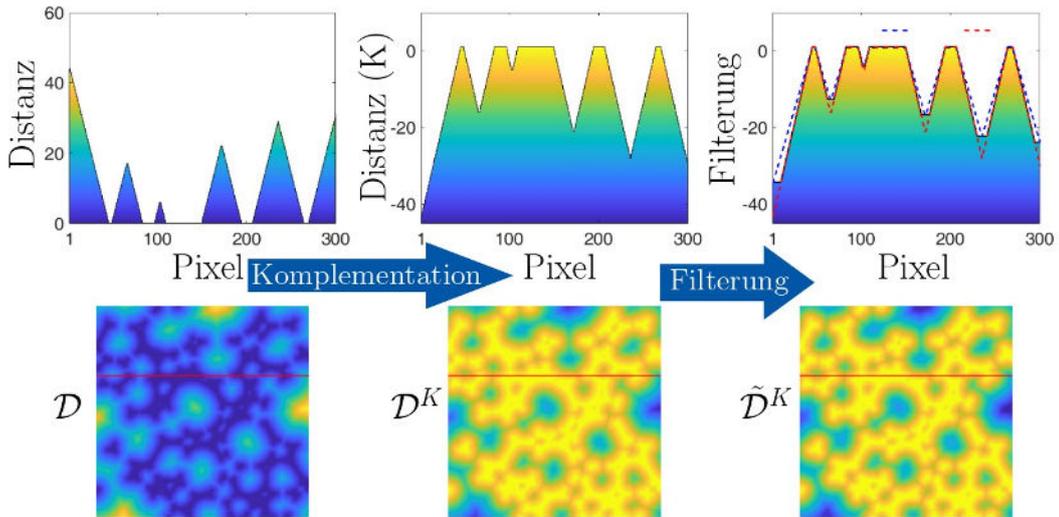


Abbildung 3.2: Darstellung des Porensegmentierungsalgorithmus: Die Distanztransformation wird zunächst invertiert und anschließend gefiltert; die korrespondierende eindimensionale Analyse ist in der oberen Reihe dargestellt (oben: 1D-Operationen auf Basis von 1D-Daten; unten: 3D-Operationen auf Basis von 3D-Daten)

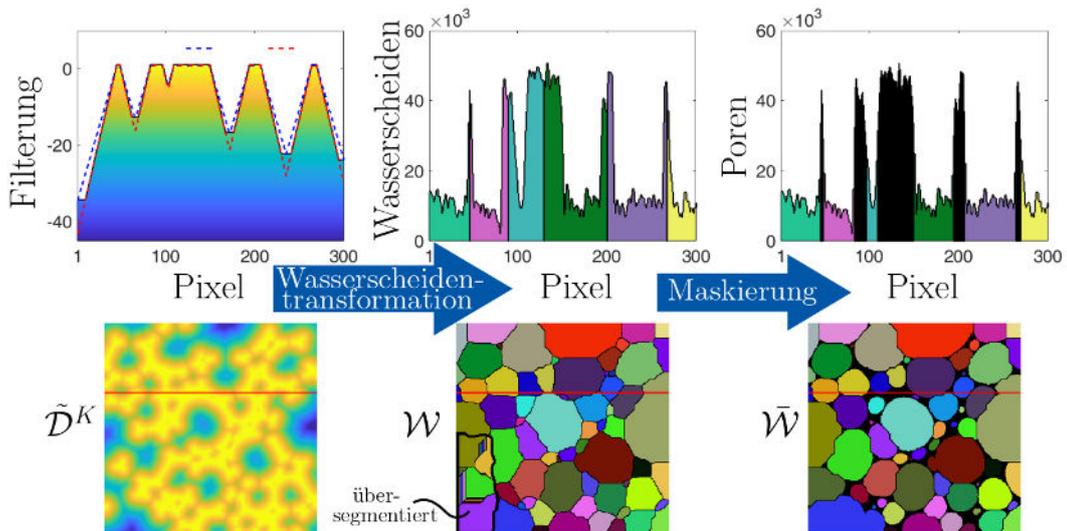


Abbildung 3.3: Darstellung des Porensegmentierungsalgorithmus: Die gefilterte Distanztransformation wird durch eine Wasserscheidentransformation (W) segmentiert und nachfolgend mit dem binarisierten Bild maskiert, sodass die Ursprungsform der Poren erhalten bleibt; die korrespondierende eindimensionale Analyse ist in der oberen Reihe dargestellt (oben: 1D-Operationen auf Basis von 1D-Daten; unten: 3D-Operationen auf Basis von 3D-Daten)

Die Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen der segmentierten Poren können nun durch das jeweilige Volumen der Pore, mit der Beziehung $d_{eq}^* = \sqrt[3]{(6V)/\pi}$ berechnet werden. Im Idealfall von kugelförmigen Poren, sind keine weiteren geometrischen Größen zur Beschreibung notwendig. Jedoch weichen die Poren gewöhnlich von einer kugelförmigen Gestalt ab. Informationen über die Rundheit der Poren ergeben sich durch die drei Formfaktoren $f_1 = \sqrt{\pi} 6V/\sqrt{S^3}$, $f_2 = 48\pi^2 V/M^3$ und $f_3 = 4\pi S/M^2$, welche für den kugelförmigen Fall jeweils den Wert Eins liefern. Ein globaler Parameter für die Beschreibung der Poren ist die mittlere Sehnenlänge $\bar{l} = 4V_V/S_V$, welche unabhängig von der durchgeführten Segmentierung ist und dadurch ein wichtiger Eingabeparameter für die zuvor erwähnte adaptive Filterung ist. Der inverse

Wert der mittleren Sehnenlänge beschreibt die mittlere Porenanzahl pro Zoll (mean number of pores per inch) $ppi \propto 1/\bar{l}$, einem gängigen Industriestandard in der Schaumstoffproduktion.

Das beschriebene Verfahren zur Mikrostrukturcharakterisierung wurde zunächst auf der Basis einer vorhandenen Computertomographieaufnahme aus einem vorherigen Projekt des Lehrstuhls für Festkörpermechanik entwickelt und angewandt. Die Ergebnisse dieser Analyse werden nun exemplarisch vorgestellt, bevor im Arbeitspaket 5 die im Projekt verwendeten Elastomerschäume charakterisiert werden. In Abbildung 3.4 ist das rekonstruierte Ligamentsystem und der segmentierte Porenraum eines Polyurethanschaums dargestellt. Die berechnete Porosität ϕ von 0,87 stimmt mit den Herstellerangaben von 0,85 gut überein. Die eingeführten Mikrostrukturparameter sind für den dargestellten Polyurethanschaum in der Tabelle 3.1 aufgelistet und werden im Folgenden näher beschrieben.

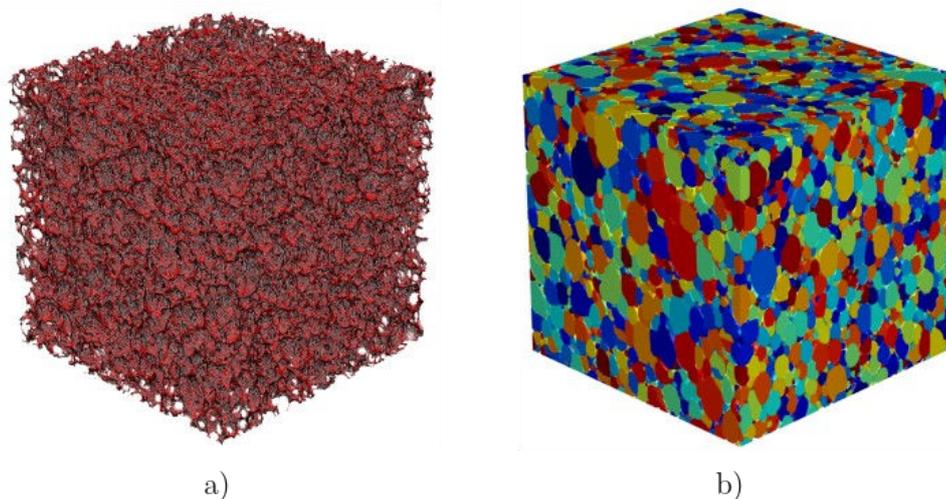


Abbildung 3.4: Ergebnis der Bildanalyse eines offenporigen Polyurethanschaums mit einer relativen Dichte 13%: a) Ligamentsystem, b) Porenraum

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	-417,2479 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	64,6963 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	11,5070 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,1268; 0,8732
Strukturmodellindex f_{SMI}	0,7434
Knotendichte N_V	417,2479 1/mm ³
spezifische Ligamentlänge L_V	23,5838 1/mm ²
mittlerer Strebenumfang \bar{u}	487,92 μm
mittlerer Strebendurchmesser bei gleichem Kreisumfang \bar{d}_{eq}°	155,31 μm
mittlere Strebenquerschnittsfläche \bar{a}	5376,35 μm^2
Anzahl an inneren Poren N	18609
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	303,54 μm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	83,68 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}	130,94 μm
Erwartungswert $E[\bar{d}_{eq}^\circ]$, Variationskoeffizient c_V (Log-Normal)	132,40 μm ; 0,88
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,81; 0,58; 0,79

Tabelle 3.1: Mikrostrukturparameter eines Polyurethanschaums

Aufgrund der negativen Dichte der Euler Charakteristik χ_V handelt es sich bei dem untersuchten Polyurethanschaum um eine offenporige Mikrostruktur. Die hohe Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V und der Oberfläche S_V deuten zudem auf eine große Anzahl verbundener Poren hin. Aus der Volumendichte V_V lässt sich die schon erwähnte Porosität ϕ bestimmen. Der Strukturmodellindex berechnet sich zu $f_{SMI} = 0,74$ und liefert einen einfachen Kennwert zur Unterscheidung von unterschiedlichen Mikrostrukturen. Wird die Knotendichte N_V von $417,2479 \text{ 1/mm}^3$ auf einen Einheitskubus der Größe 1 mm^3 bezogen ergeben sich 417 Ligamentverzweigungen. Analog lässt sich die Gesamtligamentlänge mit der spezifische Ligamentlänge L_V mit 24 mm pro Einheitskubus angeben. Die Querschnittsform der Ligamente wird durch die Parameter \bar{u} , \bar{d}_{eq}° und \bar{a} wiedergegeben. Insgesamt konnten 18609 innere Poren separiert werden. Die Eingrenzung der Auswertung lediglich auf innere Poren ist dadurch begründet, dass die Gestalt von Poren auf den Randflächen nicht exakt bestimmt werden und somit zu einer linksseitigen Verschiebung der Porendurchmesserverteilungsfunktion führt. Unter der Annahme einer logarithmischen Normalverteilung konnte ein Erwartungswert von $E[d_{eq}^\circ] = 132,40 \text{ }\mu\text{m}$ und ein Variationskoeffizient $c_V = 0,88$ berechnet werden, welche mit dem mittleren gemessenen Durchmesser $\bar{d}_{eq}^\circ = 130,94 \text{ }\mu\text{m}$ sehr gut übereinstimmt. Die mittlere Sehnenlänge $\bar{l} = 303,54 \text{ }\mu\text{m}$ liegt in der gleichen Größenordnung und dient als Eingabeparameter zur Filterung der Distanztransformation. Durch die Umrechnung des Kehrwertes der Sehnenlänge auf die Einheit Zoll ergibt sich der Industriestandard $ppi = 83,68 \text{ 1/in.}$ Die mittlere Gestalt der segmentierten Poren wird durch die drei mittleren Formfaktoren \bar{f}_i angegeben und weicht somit von der ideal kugelförmigen Pore ab.

Auf Basis der dargelegten Grundlagen zur Mikrostrukturcharakterisierung und der beispielhaften Interpretation der definierten Kennwerte werden in Kapitel 4.4.1 und 4.4.2 ausgewertet. Die ermittelten parametrischen Verteilungen dienen als Eingabeparameter für die im Arbeitspaket 3 erzeugten repräsentativen Volumenelemente.

3.2 Erzeugung von repräsentativen Volumenelementen

Eine umfassende Beschreibung des RVE-Generierungstools befindet sich ebenfalls in der Veröffentlichung „Microstructure characterization and stochastic modeling of open-cell foam based on μ CT-image analysis“ [3]. Die wesentliche Zwischenschritte werden wie folgt knapp zusammengefasst und anschließend genauer erläutert. Die computergestützte Generierung von offenporigen Schäumen basiert auf einer gewichteten Voronoi-Zerlegung, der sogenannten Laguerre-Zerlegung. Diese Zerlegung erzeugt, in Kombination mit einer dichtesten Kugelpackung innerhalb eines Volumens, sich berührende Polyeder. Durch einen parametergesteuerten Skalierungsprozess werden die erzeugten Polyeder anschließend geschrumpft, sodass sich in dem entstehenden Zwischenraum eine offenporige Schaumstruktur bildet.

Als Eingabeparameter des Generierungstools dienen die Porosität ϕ , die Porenanzahl N , eine Porengrößenverteilungsfunktion unter Angabe des Variationskoeffizienten c_V , das begrenzende Volumen, ein Ligamentformparameter s_f und gegebenenfalls Anisotropiefaktoren. Im Rahmen dieses Projektes wird die äußere Geometrie stets durch einen Quader der Kantenlänge l_{RVE} vorgegeben. In Abbildung 3.5 ist die Anordnung von 200 logarithmisch normalverteilten dicht gepackten Poren mit drei verschiedenen Variationskoeffizienten c_V (0,1; 0,8; 1,5) dargestellt. Die Porenzentren werden immer als gleichverteilt im Raum angenommen. Durch den verwendeten force-biased Algorithmus [5], [6] werden periodische Ränder erzeugt, sodass geschnittene Kugelteile außerhalb des Quaders an der gegenüberliegenden Seite wiedereintreten und

dadurch das Volumen ausfüllen. Dies entspricht einer Aneinanderreihung des RVEs in alle Raumrichtungen. Die wiedereintretenden Kugelanteile sind in den Abbildungen transparent dargestellt, sind jedoch streng genommen kein Teil der dichtesten Packung.

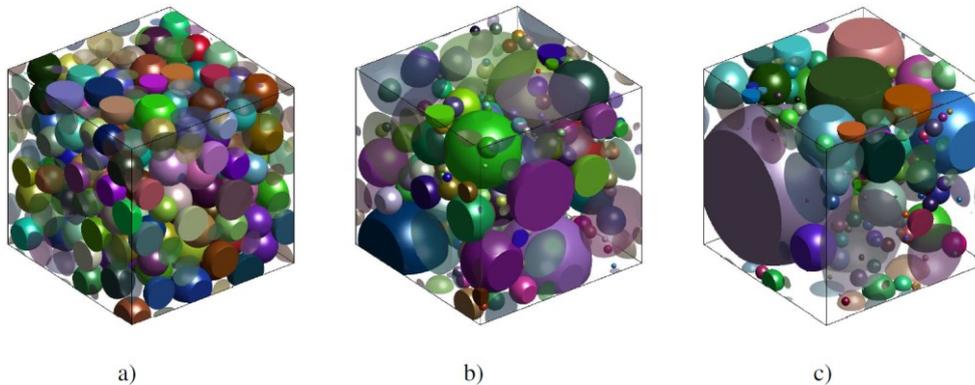


Abbildung 3.5: Dichteste Kugelpackung innerhalb eines Quaders mit verschiedenen Variationskoeffizienten

Ausgehend von der dichtesten Packung erfolgt nun die Volumenzerlegung (eng. volume tessellation), d.h. dass der Leerraum zwischen den Kugeln, den Bereichen der benachbarten Kugeln zugeordnet werden. Als Resultat ergeben sich nicht überlappende polyedrische Regionen, welche zusammen den gesamten Quader ausfüllen. Die Aufteilung erfolgt im einfachsten Fall (Voronoi-tessellation) über die Berechnung der euklidischen Distanz für jeden Punkt \vec{x}

$$d_V^2(\vec{x}, \vec{x}_i) = \|\vec{x} - \vec{x}_i\| \quad 3.1$$

wobei \vec{x}_i die jeweiligen Positionen der Porenzentren darstellen. Eine Voronoi-Zelle ergibt sich nun durch die Bedingung $d_V(\vec{x}, \vec{x}_i) \leq d_V(\vec{x}, \vec{x}_j)$ für $i \neq j$, welche der i-ten Zelle jeden Punkt \vec{x} zuordnet, deren euklidische Distanz kleiner ist als zum Zentrum der benachbarten j-ten Zelle. Die Größen der Voronoi-Zellen korrelieren jedoch nicht mit der vorgegebenen Porengrößenverteilung, daher wird die Distanzberechnung wie folgt angepasst

$$d_L^2(\vec{x}, \vec{x}_i) = \|\vec{x} - \vec{x}_i\| - r_i^2. \quad 3.2$$

Hierin entspricht r_i dem jeweiligen Radius der Kugel, deren Zentrum sich an der Position \vec{x}_i befindet. Die auf d_L basierende Volumenzerlegung wird Laguerre-Zerlegung genannt und gewichtet die entstehenden Zellen im Vergleich zur Voronoi-Zerlegung. Zu berücksichtigen bleibt, dass die erwähnten, nicht im Volumen enthaltenen wiedereintretenden Kugeln der dichtesten Kugelpackung zu Randeffekten bei der Zerlegung führen, weil sich dadurch einzelne Laguerre-Zellen ungehindert bis zum Rand ausbreiten können. Dies führt offensichtlich zu einer Verzerrung der vorzuschreibenden Porendurchmesserverteilungsfunktion.

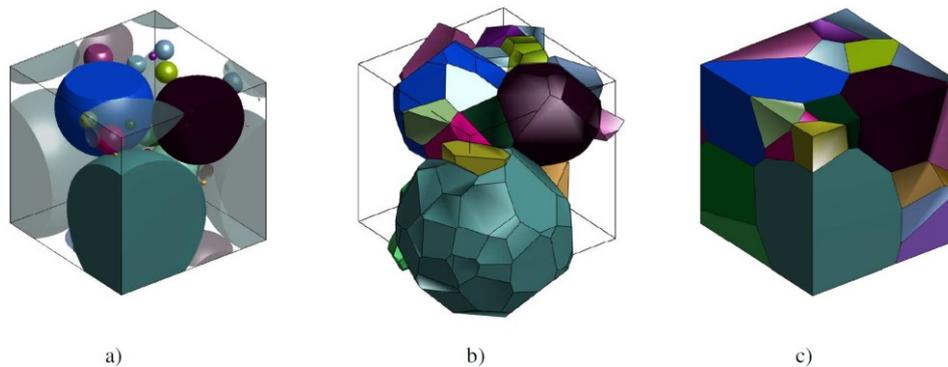


Abbildung 3.6: Laguerre Zerlegung einer dichtesten Kugelpackung a) mit periodischer Fortsetzung b) und ohne c)

Um diese Randeffekte zu vermeiden, wird vor der Laguerre-Zerlegung die dichteste Kugelpackung zunächst in alle Raumrichtungen erweitert, d.h. es werden insgesamt 26 (6 entlang den Flächen, 12 entlang den Kanten, 8 entlang den Ecken) Kopien der Packung räumlich angeordnet. Solch eine periodische Weiterführung erzeugt schließlich eine Volumenzerlegung, deren Zellgrößen mit den ursprünglichen Kugeln korrelieren, wie durch einen Vergleich in Abbildung 3.6 zu sehen. Deutlich sind die Unterschiede an der blauen Zelle zu erkennen, deren Volumen sich ohne periodische Wiederholung im Randbereich vergrößert.

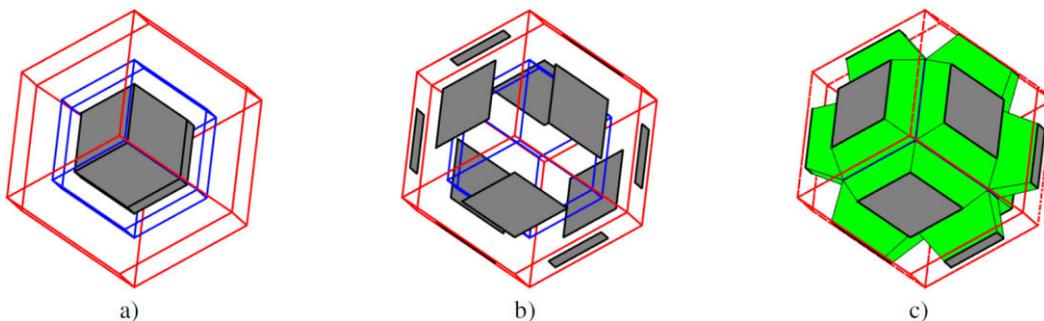


Abbildung 3.7: Darstellung einer Porengenerierung basierend auf einer unskalierten (rot) und zwei skalierten (blau, grau) Laguerre-Zellen: a) Skalierungsprozess, b) Oberflächenprojektion, c) Erzeugung einer einzelnen Pore

Um den genannten Skalierungsprozess der erzeugten Polyeder genauer erklären zu können, liegt der Fokus zunächst auf einer einzelnen Laguerre-Zelle, welche in Abbildung 3.7 a) rot dargestellt ist. Diese wird nun sowohl mit dem Faktor $\sqrt{s_f}$ (graue Zelle) als auch durch den Skalierungsparameter $s_p(s_f, \phi)$ (blaue Zelle),

$$s_p = -\frac{\sqrt{s_f}}{2} + \sqrt{\frac{s_f}{4} - \frac{s_f - \phi}{1 - \sqrt{s_f}}} \quad 3.3$$

der vom Ligamentformfaktor s_f und der Porosität ϕ abhängt, geschrumpft. In einem zweiten Schritt werden die grauen Flächen auf die Flächen der roten Zelle verschoben (siehe b)) und anschließend durch Pyramidenstümpfe (grün) mit der blauen Zelle verbunden (siehe c)). Das Ergebnis lässt sich als Porenraum einer einzelnen Zelle interpretieren.

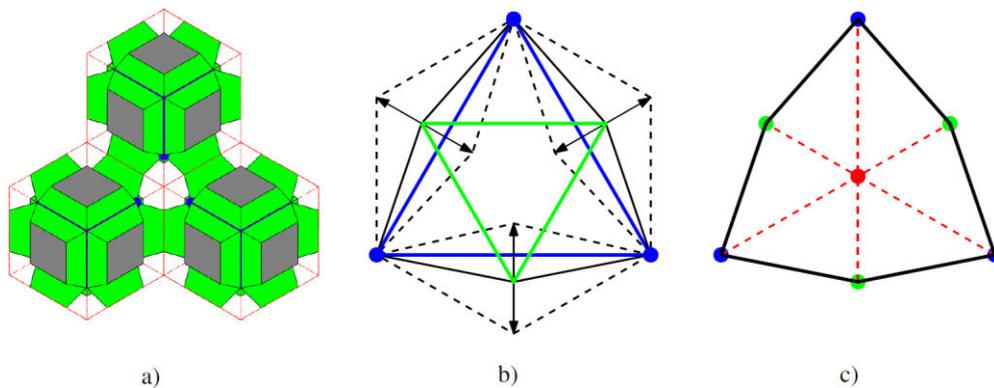


Abbildung 3.8: Darstellung eines Porensystems: a) 3 verbundene Laguerre-Zellen, b) resultierender Ligamentquerschnitt, c) Ligament-Triangulation

Wird dieser Skalierungsvorgang für drei benachbarte Laguerre-Zellen wiederholt, ergibt sich das in Abbildung 3.8 a) zu sehende verbundene Porensystem. Die grau markierten Flächen liegen nun im Inneren deckungsgleich übereinander und bilden Löcher zwischen den benachbarten Poren. Der entstandene Leerraum im Zentrum der dargestellten Laguerre-Zellen entspricht im inversen Fall einem Ligament der Schaumstruktur. Deren Querschnittsform wird durch zwei Dreiecke definiert, welche in Abbildung 3.8 b) skizziert sind. Das blaue Dreieck basiert auf den blau skalierten Zellen und das grüne Dreieck ist durch den Ligamentformfaktor s_f definiert. Durch die Verbindung aller Eckpunkte ergibt sich der Ligamentquerschnitt als deformiertes Hexagon, deren Form durch die Skalierungsparameter bestimmt werden, siehe Andeutung durch gestrichelte Linien. Die entstehenden konvexen oder konkaven Querschnitte können durch Projektionslinien der unskalierten Laguerre-Zellen (rot) trianguliert werden wie Abbildung 3.8 c) abgebildet. Solch eine systematische Triangulation ist insbesondere für die nachfolgende FEM-Diskretisierung wichtig. In Abbildung 3.9 ist der Einfluss des Ligamentformfaktors s_f (0,1; 0,3; 0,6) auf die generierten Ligamentquerschnitte und -knoten im Dreidimensionalen zu sehen, wobei die entstehenden Oberflächen zusätzlich volumenerhaltend geglättet wurden.

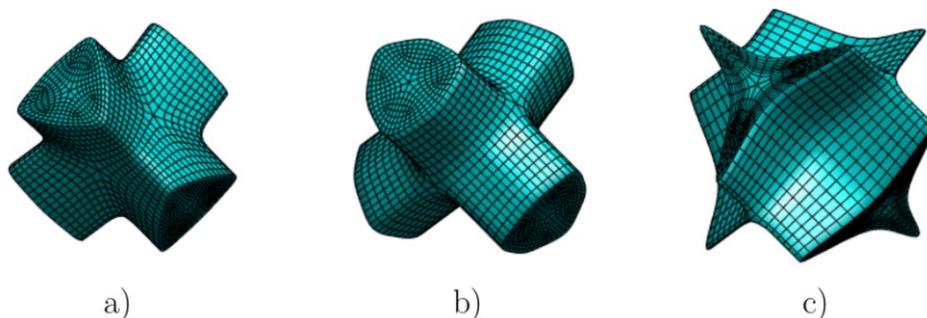


Abbildung 3.9: Darstellung des Einflusses des Ligamentformfaktors auf einen Knoten mit a) 0,1 b) 0,3 und c) 0,6

Als Ergebnis des beschriebenen Generierungstools können die in Abbildung 3.10 beispielhaft erzeugten repräsentativen Volumenelemente erzeugt werden. Diese wurden mit 100 gleich großen Poren, einer Porosität von $\phi = 0,85$ und verschiedenen Ligamentformfaktoren s_f (0,01; 0,15; 0,4) erstellt und mit Hexaederelementen diskretisiert.

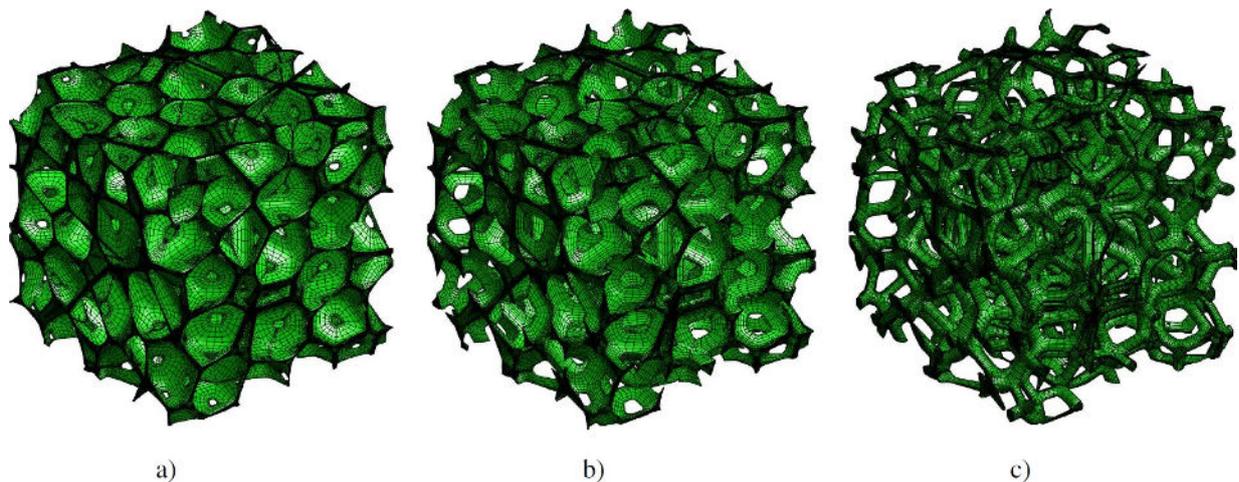


Abbildung 3.10: Repräsentative Volumen Elemente mit einer Porosität von 85% und 100% gleich großen Poren mit verschiedenen Ligamentformfaktoren a) 0,01 b) 0,15 und c) 0,4

3.3 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Zur Beschreibung des Deformationszustands an einem Punkt eines materiellen Körpers wird in der Kontinuumsmechanik der sogenannte Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{dx}{dX} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \quad 3.4$$

verwendet. Dieser entspricht der Ableitung der Position x eines Materialpunkts in Momentankonfiguration (deformiert) nach der Position X in Referenzkonfiguration (undeformiert). Sowohl die reine Deformation als auch die Starrkörperrotation sind durch diesen Tensor vollständig beschrieben. Eine Transformation mit \mathbf{F} kann, wie in Abbildung 3.11 illustriert, auch stets in zwei hintereinander auftretende Teiltransformationen zerlegt werden – einer reinen Streckung mit dem rechten Streckungstensor \mathbf{U} , welcher eine reine Starrkörperrotation mit dem Rotationstensor \mathbf{R} folgt. Diese multiplikative Zerlegung von \mathbf{F} ist auch in umgekehrter Reihenfolge möglich – einer reinen Streckung mit dem linken Streckungstensor \mathbf{v} , folgend auf eine Starrkörperrotation mit \mathbf{R} .

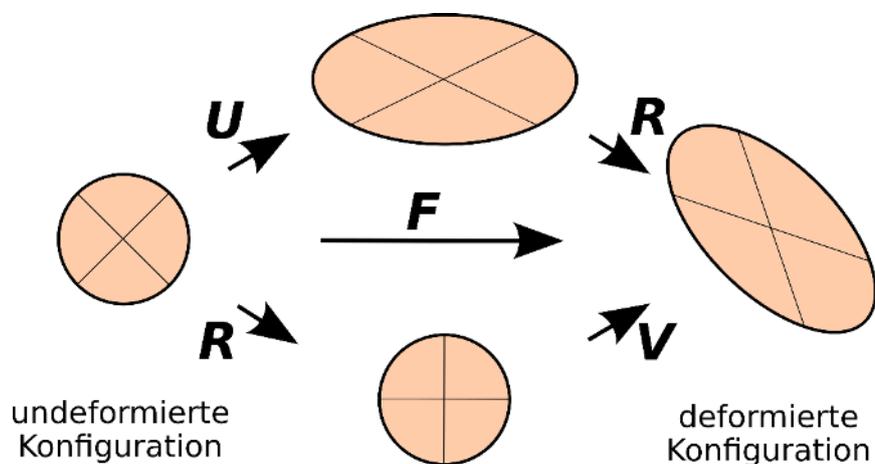


Abbildung 3.11: Transformation eines Materialpunkts mit den Tensoren \mathbf{F} , \mathbf{R} , \mathbf{U} und \mathbf{v}

Für die Formulierung von Konstitutivgesetzen ist es oft wünschenswert, dass der dehnungsfreie Zustand dem Nulltensor entspricht. Diese Eigenschaft weisen beispielsweise der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor \mathbf{E} und der Euler-Almansi Verzerrungstensor \mathbf{e} auf, welche wiederum von den quadrierten Streckungstensenoren (rechter und linker Cauchy-Green-Tensor \mathbf{C} und \mathbf{B}) abhängen. Falls isotropes Materialverhalten vorliegt, besteht außerdem die Möglichkeit, ein Materialgesetz in Abhängigkeit von den Hauptinvarianten oder -streckungen zu formulieren, welche den Deformationszustand unabhängig vom gewählten Koordinatensystem beschreiben. Eine Übersicht zu den unterschiedlichen Deformationsmaßen in Referenz- und Momentankonfiguration ist zudem in Tabelle 3.2 gegeben.

	Referenzkonfiguration	Momentankonfiguration
rechter/linker Streckungstensor	\mathbf{U}	\mathbf{V}
rechter/linker Cauchy-Tensor	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$	$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2$
Dehnungstensenoren für große Deformationen	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$
Hauptinvarianten	$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{b})$ $I_2 = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{b})^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)]$ $I_3 = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{b})$	
Hauptstreckungen	$\det(\mathbf{U} - \lambda_i \mathbf{I}) = \det(\mathbf{v} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0 \rightarrow \lambda_i$	

Tabelle 3.2: Deformationsmaße für große Deformationen

Analog zu den Dehnungsmaßen existieren auch Spannungsmaße in den unterschiedlichen Konfigurationen. Die physikalische Bedeutung des ersten und zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors sowie des Cauchy-Spannungstensors ist Tabelle 3.3 zu entnehmen. Hierbei entspricht $d\mathbf{f}$ dem Kraftvektor, dA der Bezugsfläche und \mathbf{n} dem normierten Normalenvektor in Momentankonfiguration; mit 0 indizierte Größen entsprechen einer Beschreibung in der Referenzkonfiguration.

	Referenzkonfiguration (2.PK-Spannung \mathbf{S})	Gemischte Konfiguration (1.PK-Spannung \mathbf{P})	Momentankonfiguration (Cauchy-Spannung $\boldsymbol{\sigma}$)
Spannungsmaß	$\frac{d\mathbf{f}_0}{dA_0} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{n}_0$	$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0$	$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$

Tabelle 3.3: Spannungsmaße in unterschiedlichen Konfigurationen

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen (und gegebenenfalls deren Raten) wird bei einer mechanischen Analyse vom Materialgesetz vorgegeben. Ziel ist es, die Verschiebung der Materialpunkte des materiellen Körpers so zu bestimmen, dass neben dem Materialgesetz die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad 3.5$$

und die Kinematik an jedem materiellen Punkt erfüllt sind. Da eine analytische Lösung des resultierenden Differentialgleichungssystems mit der Gleichgewichtsbedingung in differentieller Form (also an jedem Punkt) nur für sehr einfache Geometrien, Randbedingungen und Materialgesetze möglich ist, werden zur Lösung in der Regel numerische Verfahren wie die Finite

Elemente Methode genutzt, bei der die Gleichgewichtsbedingung aber nur integral („in schwacher Form“) erfüllt ist. Eine Übersicht zu den Beziehungen zwischen den Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen und äußeren Lasten ist in Abbildung 3.12 gegeben.

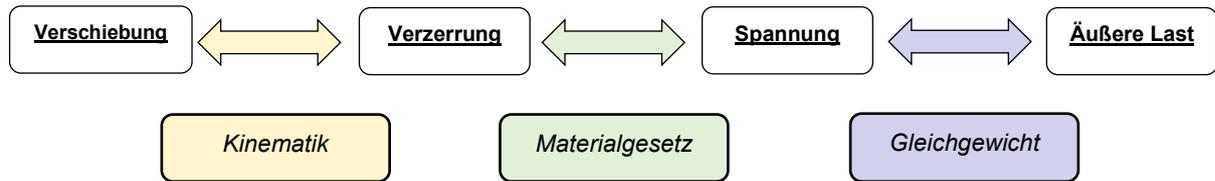


Abbildung 3.12: Beziehungen in der Kontinuumsmechanik

Elastomere und Elastomerschäume werden zumeist auf Grundlage eines nichtlinear-elastischen (bzw. hyperelastischen) Materialgesetzes modelliert. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen folgt hierbei aus der Ableitung eines Potentials, der sogenannten Verzerrungsenergiedichte $\rho_0\psi$, nach einem Verzerrungstensor:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}. \quad 3.6$$

3.4 Materialmodelle für geschäumte Elastomere

In den meisten kommerziellen FE-Softwarepaketen stehen grundsätzlich zwei Materialmodelle für geschäumte Elastomere zur Verfügung. Zum einem ist ein von Blatz und Ko [7] bereits 1962 vorgestelltes Modell - das erste explizit für Elastomerschäume entwickelte Konstitutivgesetz - sehr verbreitet. Dieses hyperelastische Modell kann beispielsweise bei *COMSOL Multiphysics* genutzt werden und basiert hier auf der Verzerrungsenergiedichtefunktion

$$\rho_0 \psi = \theta \frac{\mu}{2} \left((I_1 - 3) + \frac{1}{\beta} (I_3^{-\beta} - 1) \right) + (1 - \theta) \frac{\mu}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} - 3 + \frac{1}{\beta} (I_3^{-\beta} - 1) \right), \quad 3.7$$

wobei μ dem Schermodul entspricht und $\beta \in [0, \infty]$ und $\theta \in [0, 1]$ weitere materialspezifische Kennwerte sind. Für den Fall $\beta \rightarrow \infty$ und $\theta = 1$, geht $\rho_0\psi$ in ein Neo-Hooke-Potential über. Im Gegensatz zu den Potentialen für nahezu-inkompressible Materialien, ist die Verzerrungsenergiedichte nicht mehr additiv in einen isochoren und volumetrischen Anteil aufteilbar. Die übliche Vorgehensweise zur Identifikation der Materialkennwerte, bei welcher die Parameter des isochoren Anteils isoliert unter der Annahme der idealen Inkompressibilität bestimmt werden, kann nicht mehr angewandt werden. Da die volumetrische und die isochore Modellantwort nicht voneinander entkoppelt betrachtet werden können, sollten bei der Parameteridentifikation neben der Spannungs-Dehnungskurve auch Daten zum Querdehnverhalten vorliegen. Alternativ sind hier beispielsweise uniaxiale Druckversuche mit behinderter Querdehnung (Confined Axial Compression) denkbar. Eine vereinfachte Variante des Blatz-Ko-Modells mit der Verzerrungsenergiedichtefunktion

$$\rho_0 \psi = \frac{\mu}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad 3.8$$

steht in der FE-Software *ANSYS Workbench* zur Verfügung. Demgegenüber enthalten *MSC Marc* („Foam“), *Simulia Abaqus* („Hyperfoam“) und *LS Dyna* („Ogden Foam“) eine Implementierung des

in der industriellen Praxis sehr weit verbreiteten Ogden-Foam-Modells [8], welches auf der Verzerrungsenergiedichtefunktion

$$\rho_0 \psi = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{1}{\omega_i} (\lambda_1^{\omega_i} + \lambda_2^{\omega_i} + \lambda_3^{\omega_i} - 3) - \frac{1}{\beta_i} (J^{\beta_i} - 1) \right) \quad 3.9$$

basiert. Grundsätzlich entspricht diese einem um einen volumetrischen Term erweiterten „klassischen“ Ogden-Potential. Analog zum Blatz-Ko-Modell sollten beim Fitting explizit Daten zum volumetrischen Verhalten vorgegeben werden.

Die in den FE-Softwarepaketen enthaltenen Materialmodelle für Elastomerschäume weisen somit folgende Unzulänglichkeiten auf:

- Eine mechanische Charakterisierung einer jeden Schaumstruktur ist notwendig. Es gibt keine Parameter, wie etwa die Porosität, um das Modell an andere Schaumstrukturen (ohne zusätzliche mechanische Charakterisierung) anzupassen.
- Bei der Identifikation der Parameter muss das volumetrische Verhalten auf der Basis von geeigneten Versuchen miterfasst werden.
- Die Modelle sind auf die Nutzung bei isotropen Schäumen beschränkt.
- Inelastische Effekte werden vernachlässigt. Teilweise ist jedoch eine Kombination mit Teilmodellen zur Berücksichtigung von Mullins Effekt und viskosen Einflüssen möglich.

Es existieren jedoch auch eine Vielzahl anderer Modelle, die bisher jedoch keinen Einzug in die industrielle Praxis gefunden haben. So schlagen Jemiolo und Turteltaub [9] eine Modifikation des Ogden-Foam-Modells vor, bei welcher neben den rein phänomenologischen Parametern v_i , ω_i und β_i die Porosität als zusätzlicher physikalisch-basierter Kennwert zur Beschreibung der Mikrostruktur eingeführt wird. Aufgrund dessen können Schaumstrukturen mit unterschiedlichen Porositäten auf Basis einer einzigen mechanischen Charakterisierung (bei einer beliebigen Porosität) beschrieben werden.

Ein Modell, welches das viskoelastische Verhalten von Elastomerschäumen abbilden kann, wurde von Koprowski-Theiß in [10] vorgestellt. Auf Grundlage der „Theorie der porösen Medien“ wird hier zudem der Einfluss des Gasdrucks in den Poren und der Elastomermatrix getrennt voneinander modelliert.

Neben den bereits vorgestellten, phänomenologischen Modellen existieren auch Veröffentlichungen zu Modellen, bei denen die Mikrostruktur des Schaums direkt berücksichtigt wird [11] [12]. Hierbei wird das makroskopische Verhalten auf Basis des Verhaltens eines repräsentativen Schaumausschnitts vorausgesagt. Aufgrund des enormen Rechenaufwands zur Lösung des mikroskopischen Randwertproblems ist eine Verwendung bei den meisten industriellen Fragestellungen jedoch grundsätzlich nicht lohnenswert. Ein entsprechender Ansatz, welcher durch die Nutzung einer Hohlkugel zur Beschreibung der Mikrostruktur vergleichsweise niedrige Rechenzeiten ermöglicht, wurde von Danielsson [2] vorgestellt. Dieses isotrop-hyperelastische Modell wurde im Rahmen des Projekts weiterentwickelt, sodass auch inelastische Effekte und diverse Mikrostruktureinflüsse berücksichtigt werden können.

4 Durchgeführte Arbeiten und Ergebnisse im Berichtszeitraum

4.1 AP 2: Mischungs- und Prüfkörperherstellung, Mechanische Charakterisierung (DIK + PbA + Siegen)

4.1.1 Polymertypen und Vernetzungssysteme

Es wurden vier Mischungen - zwei NR-basierte Systeme (25 phr und 75 phr Rußgehalt) und zwei weitere Systeme auf EPDM-Basis (25 phr und 75 phr Rußgehalt) – hergestellt. Die Rezepturen der hergestellten Mischungen sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

	DIK-1	DIK-2	DIK-3	DIK-4
NR RSS	100,0	-	100,0	-
EPDM (Keltan 2450)	-	100,0	-	100,0
N550	75,0	75,0	25,0	25,0
ZnO	3,0	3,0	3,0	3,0
Stearinsäure	1,0	1,0	1,0	1,0
Vulkanox 4020 (6PPD)	3,0	3,0	3,0	3,0
Perkac. TMTD/ VulkThiuram	0,2	0,2	0,2	0,2
Vulkacit NZ / TBBS	1,6	1,6	1,6	1,6
Schwefel	2,0	2,0	2,0	2,0
organisches Treibmittel mit 31% Natriumhydrogencarbonat	4,1	4,4	3,4	3,7

Tabelle 4.1: Rezepte der untersuchten NR- und EPDM-basierten Mischungen

Da das Treibmittel bei den Temperaturen, die beim Mischungsvorgang (mit einer *Haake Rheomix OS 600*) auftreten, bereits Gas abspalten würde, wird dieses im Nachhinein separat eingemischt. Hierfür wurde ein Walzwerk genutzt, dessen Temperatur stets unterhalb der Zersetzungstemperatur von 50°C gehalten worden ist. Der Walzvorgang hat hierbei grundsätzlich einen erweichenden Einfluss auf das vulkanisierte Material, wohingegen die Zugabe des Treibmittels eine versteifende Wirkung hat. Um sicherzustellen, dass die hergestellten Vollmaterialproben und das Matrixmaterial der produzierten Elastomerschäume möglichst ähnliche mechanische Eigenschaften aufweisen, wurde das Treibmittel ebenfalls dem Vollmaterial beigemischt. Die Porenbildung wird in diesem Fall durch einen durchgehend hohen Pressendruck bei der Vulkanisation verhindert. Neben 2 mm dicken Platten zum Ausstanzen von S2-Zugstäben wurden aus allen Mischungen auch Prüfkörper für planare und äquibiaxiale Zugversuche hergestellt. Zudem wurden Mischungen, Vollmaterialproben und entsprechende Schäume von den Projektpartnern ESN und Meteor zur Verfügung gestellt. Die nach Norm [13] ermittelten Dichten und Shore-A-Härten der Vollmaterialproben sind Tabelle 4.2 und Tabelle 4.3 zu entnehmen.

	DIK-1	DIK-2	DIK-3	DIK-4	ESN	Meteor
Dichte $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	1,1813	1,1500	1,0498	1,0039	1,1242	1,1153

Tabelle 4.2: Dichte der Vollmaterialproben

	DIK-1	DIK-2	DIK-3	DIK-4	ESN	Meteor
Shore-A-Härte	78,3	77,2	53,1	64,0	58,8	43,7

Tabelle 4.3: Shore-A-Härte der Vollmaterialproben

Um einen möglichst identischen Vernetzungszustand in den Vollmaterialproben und in der Matrix der Schäume zu erreichen, wurde sowohl bei der Vollmaterial- als auch bei der Schaumproduktion die TC95-Vulkanisationszeit (bei 160°C) gewählt. Zunächst wurden geschäumte Platten im sogenannten Expansionsverfahren hergestellt, bei welchem die Porenbildung zu Anfang durch einen sehr hohen Pressendruck beim Vulkanisieren verhindert wird. Das Treibmittel spaltet währenddessen Gas ab, welches in komprimierter Form jedoch nur ein sehr kleines Volumen einnimmt. Bevor die Vulkanisation vollständig abgeschlossen ist, wird die Presse geöffnet, damit die Mischung infolge des inneren Gasdrucks auftreiben kann. Im Folgenden wird diese weiterhin einer hohen Temperatur ausgesetzt, bis die Mischung vollständig ausvulkanisiert ist.

Die entstehende Porenstruktur hängt dabei maßgeblich vom Treibmittelgehalt, der Steifigkeit der teilvulkanisierten Mischung und den vom Porengas induzierten Druck ab. Diese Einflussgrößen können indirekt durch die Prozessparameter - wie etwa dem Öffnungszeitpunkt und der Öffnungsweite der Presse, sowie der Wahl des Treibmittels und des Treibmittelgehalts - gesteuert werden. Durch die Variation dieser Parameter wurden Schäume mit unterschiedlichen Porenstrukturen erzeugt, welche in Kapitel 4.5.5 eingehend charakterisiert werden. Es sei angemerkt, dass die im Expansionsverfahren hergestellten Schäume eine geschlossene (porenfreie) Außenhaut aufweisen. Aufgrund dessen wurde die geschlossene Oberfläche mit einer Schneidemaschine – soweit möglich – entfernt. Innerhalb einer Platte kann die Porenstruktur sehr stark variieren, weswegen die für die mechanische Charakterisierung benötigten S2-Zugstäbe, lediglich aus Bereichen ausgestanzt wurden, in denen die Porenstruktur relativ homogen ist.

Des Weiteren wurden geschäumte Zylinder (*Radius* $r = 1\text{ cm}$, *Höhe* $h \approx 4\text{ cm}$) für uniaxiale Druckversuche mit dem sogenannten Treibverfahren hergestellt. Hierbei wird die Form unterfüllt, sodass das Auftreiben infolge des niedrigen Drucks bereits vor der Vulkanisation erfolgt. Treibmittelgehalt und die Füllmenge der Form müssen hierbei so aufeinander abgestimmt sein, dass die Form nach dem Auftreiben vollständig ausgefüllt ist. Überdies muss sichergestellt sein, dass die Vulkanisation frühzeitig einsetzt, da es sonst zum Einfallen der geschäumten, noch unvulkanisierten Mischung kommt. Die Herstellung von Proben mit einer homogenen und repräsentativen Porenstruktur stellte sich jedoch als äußerst schwierig dar, da immer wieder größere Lufteinschlüsse in den Proben auftraten. Aufgrund dessen wurde versucht, entsprechende Bereiche beim Kürzen der Zylinder auf $1\text{ cm} < h < 3\text{ cm}$ soweit wie möglich zu entfernen.

Die Porosität ϕ aller geschäumten Proben wurde auf der Grundlage von Dichtemessungen am porenfreien Material und am Schaum mit der Beziehung

$$\phi = \frac{\rho_{\text{matrix}} - \rho_{\text{Schaum}}}{\rho_{\text{matrix}} - \rho_{\text{Porengas}}} \quad 4.1$$

bestimmt, wobei ρ_{matrix} der Dichte des Matrixmaterials (siehe Tabelle 4.2) und ρ_{Schaum} der Dichte des Schaums entspricht. Da die Dichte des Porengases $\rho_{Porengas}$ gegenüber der Dichte der Matrix und des Schaums vernachlässigbar klein ist, kann vereinfachend $\rho_{Porengas} = 0$ angenommen werden. Die Dichtemessung am Schaum wurden hierbei nach Norm [14] für geschäumte Elastomere durchgeführt, weswegen die Dichte hier anhand des Massen-Volumen-Verhältnisses bei einer definierten Prüfkörpergeometrie (und nicht mit dem Eintauchverfahren) bestimmt wurde. Die bei den hergestellten Prüfkörpern gemessenen Porositäten sind dem Validierungsteil (Kapitel 4.5.4.2- 4.5.5.2 und Kapitel 4.6) zu entnehmen.

4.1.2 Bauteilherstellung



Abbildung 4.1: Hergestellte Bauteile von Meteor (li.), Schueco (mi.) und ESN (re.)

Von den Projektpartnern Meteor GmbH, SCHUECO KG und ESN Deutsche Tischtennis Technologie GmbH wurden drei Bauteilmuster zur Verfügung gestellt, welche fotografisch in Abbildung 4.1 dargestellt sind.

Die SCHUECO KG hat ein Dichtungsprofil bereitgestellt, welches bei Baufenstern Anwendung findet. Dieses wurde im Extrusionsverfahren hergestellt, bei welcher der treibmittelhaltige Compound in einen Extruder gegeben wird, welcher die Mischung in einem ersten Schritt zu einer fließfähigen Masse aufbereitet. Anschließend erhält diese beim Pressen durch das Mundstück die gewünschte Form. Erst nach dem Austreten findet die Vulkanisation und das Auftreiben statt, wobei eine sehr exakte Prozessführung erforderlich ist, um ein gleichmäßiges, homogenes Porenbild zu erzeugen. Bei Baufensterdichtungen ist die Außenhaut üblicherweise geschlossen, um das Eindringen von Flüssigkeiten zu verhindern. Aufgrund dessen ist die Porosität beim vorliegenden Profil lokal sehr inhomogen verteilt ($0,0 < \phi < 0,63$).

Ein weiteres extrudiertes Dichtungsprofil wurde vom Projektpartner Meteor GmbH zur Verfügung gestellt, welches zur Abdichtung des Innenraums von Kraftfahrzeugen am Übergang von Fahrzeugtür und Karosserie eingesetzt wird. Da neben geschäumten Sektionen auch vollständig porenfreie Bereiche enthalten sind, werden solche Profile auch als „hybrid“ bezeichnet. Zur Versteifung der Dichtung an der Halterung ist zudem ein Stahlprofil einvulkanisiert.

Darüber hinaus wurden Beläge von Tischtennisschlägern als Bauteilmuster von der ESN Deutsche Tischtennis Technologie GmbH bereitgestellt. Diese geschäumten Platten wurden im Expansionsverfahren produziert, wobei im Gegensatz zu den DIK-Eigenherstellungen ein sehr

breites Spektrum an Porositäten erzeugt werden konnte. Der gemessene Porenvolumenanteil in den zur Verfügung gestellten geschäumten Platten ist in Tabelle 4.4 aufgeführt.

Plattenummer	Porosität	Plattenummer	Porosität
1	0,0 %	8	36,0 %
2	1,0 %	9	43,0 %
3	13,0 %	10	49,0 %
4	14,0 %	11	55,0 %
5	16,0 %	12	60,0 %
6	23,0 %	13	59,0 %
7	28,0 %	14	53,0 %

Tabelle 4.4: Porosität der geschäumten Platten von ESN

4.1.3 Mechanische Charakterisierung an Prüfkörpern - Quasistatische Belastungen

Für die mechanische Charakterisierung der in AP 2.1 hergestellten Vollmaterialproben wurde ein Prüfsystem der Firma *Zwick/Roell (Zwick Z010)* verwendet. Die Dehnraten lagen hierbei im quasistatischen Bereich und sind somit so niedrig, dass der Einfluss von Trägheitskräften vernachlässigbar klein ist.

Zunächst wurden die Bruchdehnung- und spannung anhand von uniaxialen Zugversuchen mit ausgestanzten S2-Prüfkörpern ermittelt. Der Versuch wurde weggesteuert mit einer Traversengeschwindigkeit von 200 mm/s durchgeführt, wohingegen die Dehnungen mit einem optischen System aufgenommen wurden.

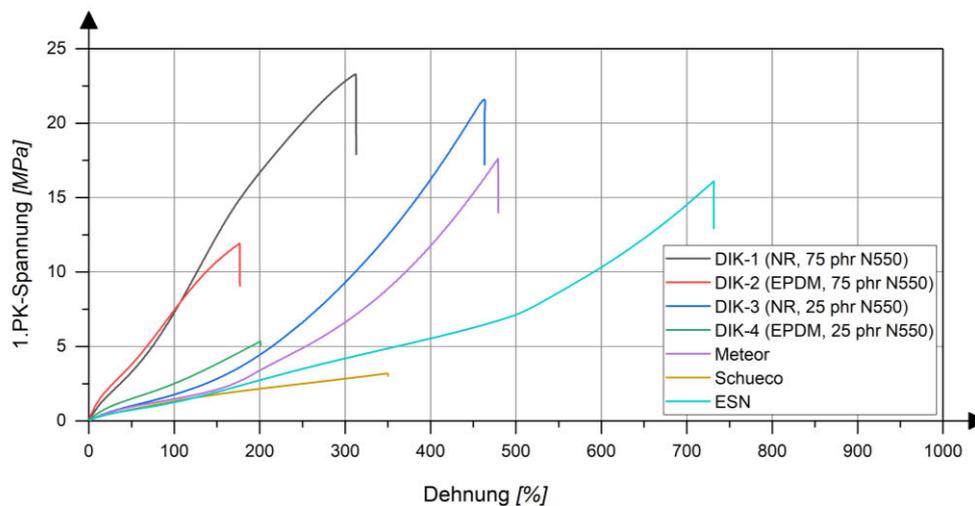


Abbildung 4.2: Zug bis Bruch bei 200 mm/s – uniaxialer Zug

Die resultierenden Spannungs-Dehnungskurven in Abbildung 4.2 zeigen, dass die untersuchten Materialien in ihrem mechanischen Verhalten stark variieren. Insbesondere die Eigenherstellungen „DIK-1“ und „DIK-2“ zeigen aufgrund des erhöhten Füllergehalts ein vergleichsweise steifes Materialverhalten. Zudem ist die sehr niedrige Bruchdehnung bei den EPDM-basierten Eigenherstellungen bemerkenswert. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die

von Ricker in [15] vorgestellten Ergebnisse interessant, welcher auf Basis einer mikromechanischen Simulation zeigte, dass selbst bei einer moderaten uniaxialen Zugbelastung eines Schaums mit $\varepsilon_{ux} = 100\%$, lokal mehr als doppelt so große (uniaxiale) Dehnungszustände auftreten können. Demnach könnten aus den EPDM-basierten Mischungen hergestellte Schäume bei einer derartigen Belastung makroskopisch eine Erweichung infolge versagender Porenwände zeigen.

Beim Zugversuch bis zum Bruch tritt lediglich ein einfacher Belastungsweg auf, welcher für eine Charakterisierung hinsichtlich inelastischer Effekte wie etwa Mullins Effekt üblicherweise nicht ausreichend ist. Darüber hinaus entspricht der uniaxiale Zugzustand nur einem von vielen möglichen Deformationszuständen, weswegen für eine umfassende Charakterisierung weitere sogenannte Moden wie äquibiaxialer oder planarer Zug untersucht werden sollten. Um das ratenabhängige Materialverhalten zu erfassen, sollten zudem unterschiedliche Dehnraten und Relaxationszeiten in der vorgegebenen Lastsequenz vorkommen. Auf der Grundlage dieser Überlegungen wurden die Vollmaterialproben "Multi-Step-Multi-Strain-Rate-Multi-Hysterese"-Versuchen bei zwei bis drei Moden unterzogen, deren Ergebnisse Abbildung 4.3 - Abbildung 4.6 zu entnehmen sind.

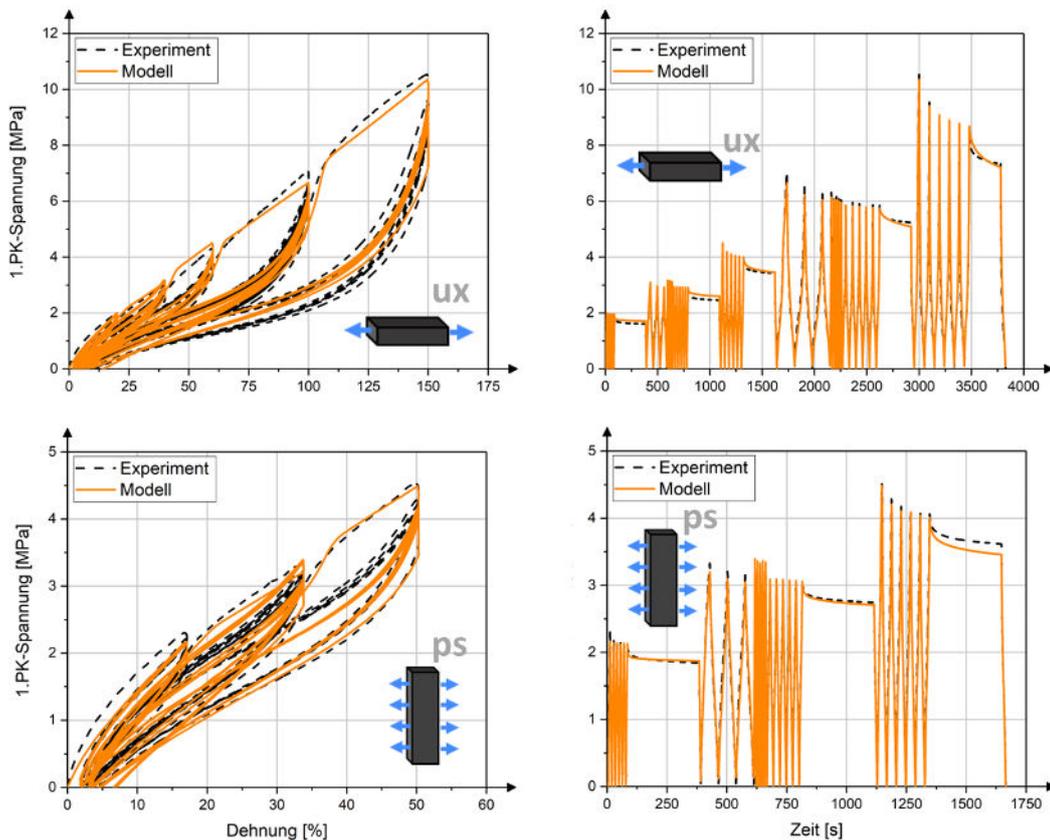


Abbildung 4.3: Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung der Eigenherstellung DIK-2

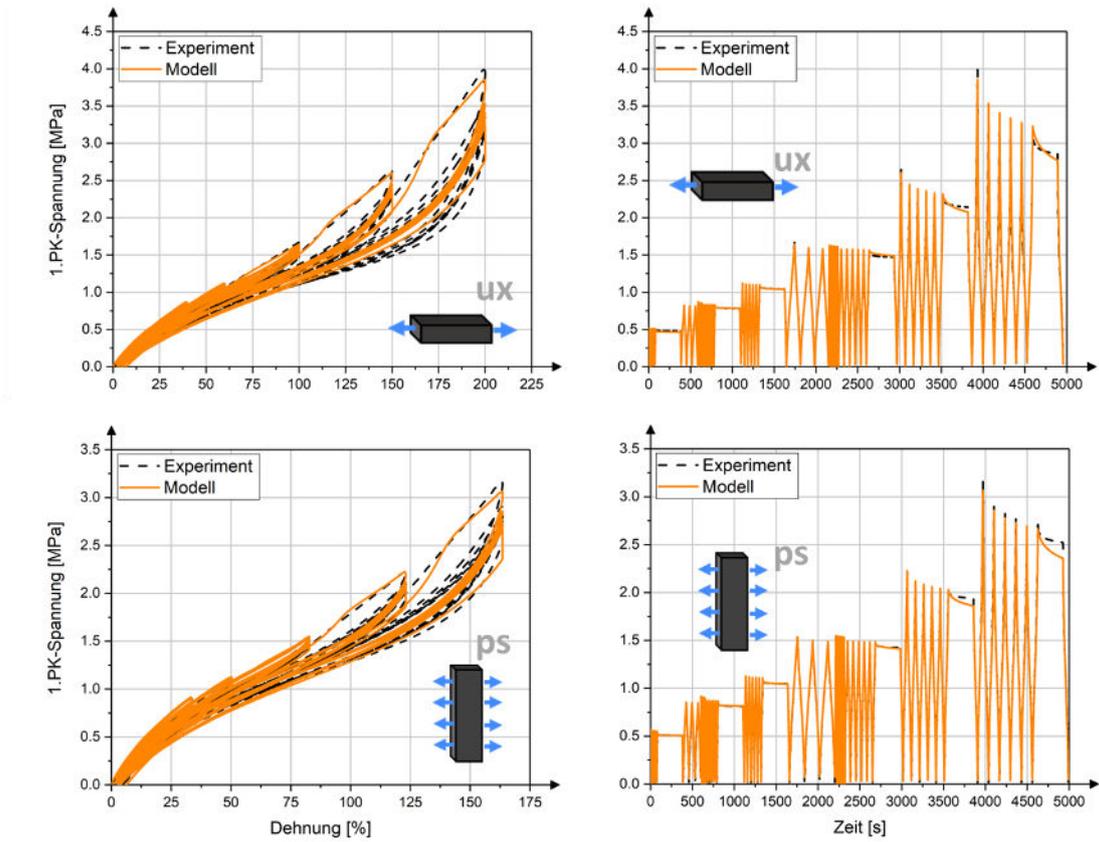


Abbildung 4.4: Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung der Eigenherstellung DIK-3

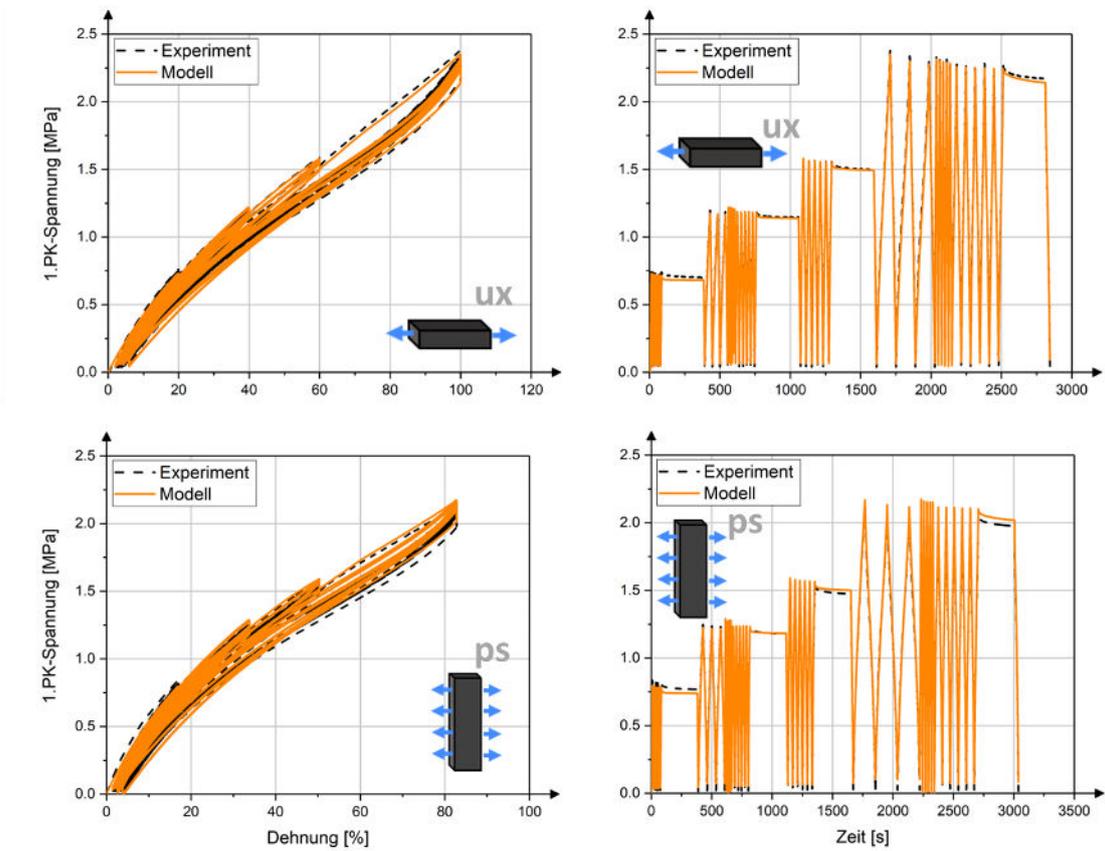


Abbildung 4.5: Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung der Eigenherstellung DIK-4

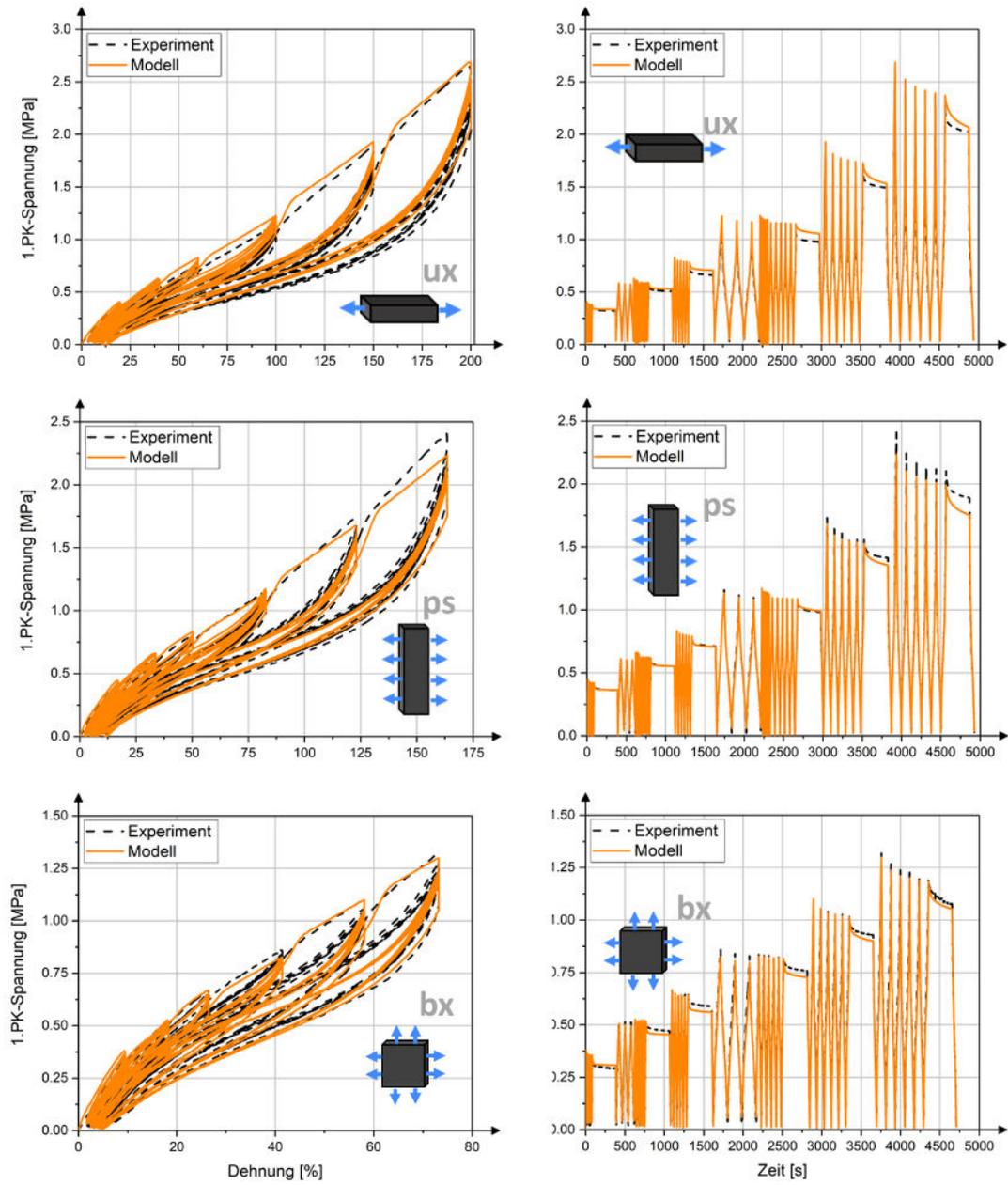


Abbildung 4.6: Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung des Industriematerials der Meteor GmbH

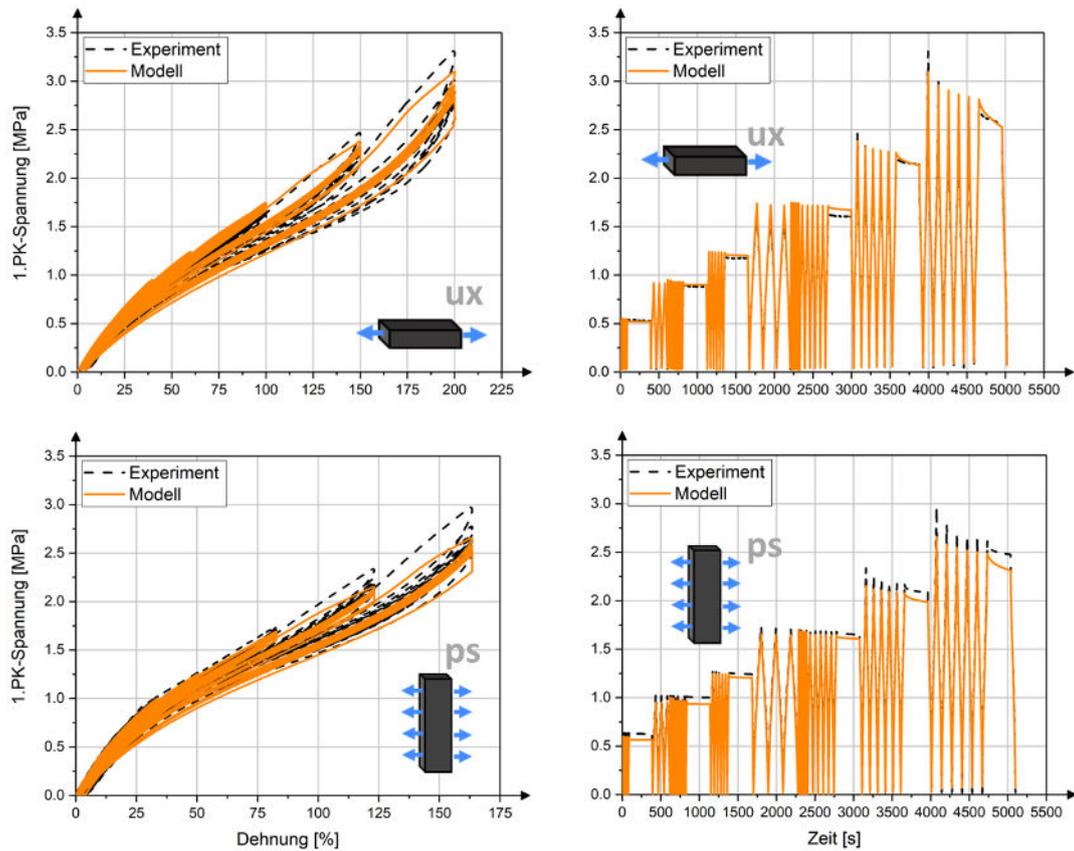


Abbildung 4.7: Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung des Industriematerials von ESN

Die im Experiment aufgenommenen Spannungs-Dehnungskurven (bzw. Spannungs-Zeitkurven) wurden zur Identifikation der Parameter des in Kapitel 4.5.2 vorgestellten Materialmodells genutzt. Hierfür wurde ein DIK-internes Fitting-Tool, welches die Abweichung zwischen Experimental- und Modelldaten auf Basis des Levenberg-Marquardt-Algorithmus minimiert, um das entsprechende Materialmodell erweitert. Die mit dem erweiterten Tool ermittelten Vollmaterialkennwerte q sind der Tabelle 4.6 zu entnehmen. Da die Anpassungsgüte bei der DIK-Eigenherstellung „DIK-1“ nicht zufriedenstellend war, wurde dieses Material für weitere Untersuchungen ausgeschlossen. Eine realitätsnahe Beschreibung des Matrixmaterialverhaltens ist nämlich essentiell für die spätere Modellierung des Verhaltens des Schaums.

Darüber hinaus wurden die Parameter des Yeoh-Modells für Vergleichsrechnungen, bei denen inelastische Effekte explizit vernachlässigt werden sollten, bestimmt. Für die Identifikation der Parameter, welche in Tabelle 4.5 aufgeführt sind, wurden lediglich Datenpunkte auf der Erstbelastungskurve genutzt. Alle an Schäumen vorgenommenen mechanischen Untersuchungen werden in Kapitel 4.5.5 - 4.6.2 vorgestellt.

	c_{10}	c_{20}	c_{30}
Meteor	0,300169	0,011766	0,000166
DIK-3	0,438573	0,000000	0,002239

Tabelle 4.5: Identifizierte Materialkennwerte für das Yeoh-Modell (Fit an Erstbelastungskurve)

	DIK-1	DIK-2	DIK-3	DIK-4	ESN	Meteor
G_c	0,620	0,716	0,335	0,291	0,582	0,184
G_f	0,083	0,045	0,061	0,258	0,073	0,045
n	24,95	38,21	45,21	17,59	25,52	33,70
χ	2,617	2,389	3,169	3,538	3,703	2,876
e_b	10,38	15,00	1,104	16,84	17,04	17,73
ν_b	0,108	0,132	0,177	0,526	1,595	0,689
ϕ^{VE}	0,291	0,278	0,121	0,120	0,129	0,284
μ_1	1,569	7,499	17,55	2,953	11,36	0,000
μ_2	13,58	5,049	0,952	0,706	0,740	0,431
μ_3	29,99	0,914	0,000	0,000	0,000	0,039
μ_4	4,072	0,000	0,000	0,000	0,000	0,612
μ_5	0,000	0,019	0,000	0,002	0,000	0,000
τ_1	0,006	0,384	0,126	0,897	0,100	0,100
τ_2	0,007	10,00	7,261	8,723	5,766	10,00
τ_3	0,033	10,38	12,43	13,54	47,72	50,00
τ_4	21,19	667,5	649,5	592,8	729,7	0,500
τ_5	4891	6353	5175	6605	4118	5,000

Tabelle 4.6: Identifizierte Vollmaterialkennwerte q

4.1.4 Mechanische Charakterisierung an Prüfkörpern - Dynamische Belastungen

Neben den statischen Untersuchungen wurden zudem dynamische Versuche an Elastomerschäumen durchgeführt. Im Fokus stand die Bestimmung der frequenzabhängigen Querkontraktionszahl von Industrieschäume mit einer effektiven Dichte ρ^* von 400 kg/m^3 bis 810 kg/m^3 . Die harmonische Belastung der zylindrischen Prüfkörper erfolgte über einen elektrodynamischen Schwingungstopf bis zu einer Anregungsfrequenz von 100 Hz . Mittels eines optischen Messverfahrens und entsprechender Bildauswertungsalgorithmen konnte die dynamischen Querkontraktionszahl ν^* für bestimmte Erregerfrequenzen berechnet werden. Aus dem Ergebnis dieser Untersuchung, siehe Abbildung 4.8, lässt sich für den untersuchten Frequenzbereich keine Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ν^* von der Erregerfrequenz f ableiten. Das Abfallen der Querkontraktionszahl bei Frequenzen über 60 Hz ist auf veränderte Prüfbedingungen zurückzuführen. Eine umfassende Beschreibung des Messverfahrens mit Methoden der Bildverarbeitung und deren Anwendungsgrenzen wurde in einem wissenschaftlichen Journal mit dem vorläufigen Titel: „Experiments on the dynamic Poisson’s ratio of PUR foams“ [16] eingereicht.

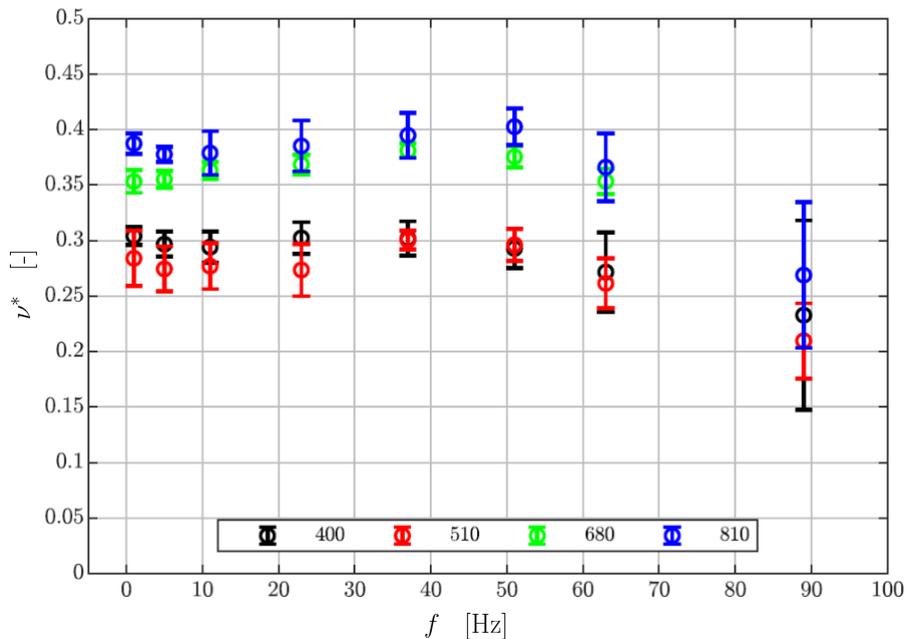


Abbildung 4.8: Messung der dynamischen Querkontraktionszahl von industriellen Elastomerschäumen, unterschiedliche Dichten ρ mittels

4.1.5 Mechanische Charakterisierung an Bauteilen

In Kapitel 4.6 werden die Modellvoraussagen den experimentellen Ergebnissen allen experimentellen Untersuchungen am Bauteil gegenübergestellt. Eine separate Darstellung der experimentellen Ergebnisse wird an dieser Stelle zur Vermeidung von Redundanzen nicht vorgenommen.

4.2 AP 3: Design und Simulation von Schäumen (Siegen)

Das computergestützte Vorgehen zur Erzeugung von Modellen für offenzellige Schaumstrukturen wurde im Abschnitt 3.2 bereits umfassend beschrieben. Durch die Anpassung der Generierungseingabeparameter an die in AP 5 (Abschnitt 4.4.2) ermittelte Mikrostruktur, können nun topologische äquivalente Schäume generiert werden (Designphase) und anschließend deren mechanisches Materialverhalten mit der Finite-Element-Methode genauer untersucht werden (Simulationsphase).

4.2.1 Designphase

Die Schaumgenerierung und die damit verbundenen Variation der Eingabeparameter erfolgte stets im Zusammenhang mit den durchgeführten FEM-Berechnungen. Folgende Parameter des Generierungstools wurden in diesem Projekt variiert: das begrenzende RVE-Volumen, die Porosität ϕ , die Porenanzahl N , der Variationskoeffizienten c_V der logarithmisch verteilten Porendurchmesservertiefungsfunktion und der Ligamentformparameter s_f . Der Einfluss der Porenausrichtung durch die Verwendung des implementierten Anisotropiefaktors blieb unberücksichtigt.

Zu Beginn wurde exemplarisch an zwei generierten RVE eine Konvergenzstudie durchgeführt, in denen lediglich die Elementgröße der zugrundeliegenden FE-Diskretisierung verändert wurde, die Schaumstruktur blieb dieselbe. Anschließend wurde in Repräsentativitätsuntersuchungen der Einfluss der Porenanzahl N , beziehungsweise das Verhältnis der RVE-Größe zum mittleren

Porendurchmesser, auf das Simulationsergebnis untersucht. Erst nach diesen Voruntersuchungen wurden die weiteren Strukturparameter im Rahmen einer Parameterstudie systematisch variiert, wobei sich der Variationsbereich einzelner Parameter an denen realer Elastomerschäume orientierten. Dabei wurde für eine festgesetzte Parameterkombination der Generierungsprozess stets mehrmals wiederholt, um den stochastischen Einfluss der topologisch äquivalenten Schäume abzuschätzen. Auf Details der betrachteten Parameterkombinationen wird im nachfolgenden Abschnitt eingegangen.

4.2.2 Simulationsphase

Neben der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Generierung der RVE, wird für eine systematische FE-Analyse eine effiziente Schnittstelle zur Einbindung der erzeugten Geometrie und anschließender Einstellung der Berechnungsmethoden und Randbedingungen benötigt. Ein händisches Einfügen und Bearbeiten innerhalb der Nutzeroberfläche kommerzieller FE-Programme ist für die Durchführung von Parameterstudien zu zeitintensiv und daher nicht zielführend. Deshalb stellen die Programme in der Regel alternative Schnittstellen zur Verfügung, welche zum Aufbau von FE-Modellen genutzt werden können. In der FEM-Software *ABAQUS* kann die Modellerstellung neben der CAE (*Complete ABAQUS Environment*) durch eine Python-Schnittstelle skriptbasierend aufgebaut werden. Das Einladen der Geometrie erfolgt durch die Übergabe der Knotenpositionen und der jeweiligen Elementzugehörigkeit. Der weitere FEM-Modell Aufbau ergibt sich durch die Verwendung der objektorientierten Programmstruktur. Wesentliche Bestandteile sind das Auffinden der RVE-Randflächenknoten und deren Zuweisung zu den variabel einzustellenden Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen im Rahmen eines statischen Berechnungsverfahrens. Zudem erfolgt die Definition des Materialmodells und der Materialparameter. Für die Durchführung von Konvergenzanalysen ist zusätzlich auch eine Elementverfeinerung und ein Wechsel der Elementformulierung zu berücksichtigen. Desweiteren ist auch das Auswerten der FEM-Analysen durch die Python-Schnittstelle möglich.

Ein wesentlicher Bestandteil einer FE-Analyse ist stets eine Konvergenzanalyse. Diese ist notwendig, um den Fehler des numerischen Verfahrens durch die gewählte Diskretisierung und Elementformulierung abzuschätzen. Insbesondere im Zusammenhang einer Parameterstudie sollte sichergestellt werden, dass der Einfluss der zu veränderten Parameter auf die Auswertungsergebnisse nicht innerhalb des Schwankungsbereichs des numerischen Fehlers liegen. Als globaler Auswertungsparameter, der im Weiteren durchgeführten Spannung/-Dehnungsberechnungen, wird hier die Dehnungsenergie verwendet. Diese wird in *ABAQUS* durch den Parameter *ALLSE* bereitgestellt. Anhand eines RVEs der Kantenlänge $l_{RVE} = 100 \text{ mm}$ mit der Porenanzahl $N = 100$, einer Porosität $\phi = 0,8$ und einem Ligamentformfaktor $s_f = 0,1$ wird das Konvergenzverhalten untersucht. Das Materialverhalten wird mit den Materialparametern $\mu = 2 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,45$ als linear elastisch angenommen. Betrachtet wird das Deformationsverhalten unter einachsigen Druck bei einseitiger fester Lagerung und gegenüberliegenden Verschiebung der Randfläche um $\Delta l = 10 \text{ mm}$. Die erstellten Randbedingungen des Modells sind in Abbildung 4.9 links zu sehen. Variiert wird nun zum einen die Anzahl der Freiheitsgrade durch eine entsprechende Verfeinerung der Elemente und zum anderen die Elementformulierung. Unterschieden wird zwischen den linearen (C3D8), den quadratischen Kontinuumselementen (C3D20) und linearen Elementen mit einem reduzierten Integrationsverfahren (C3D8R). Da die generierten FEM-Modelle zwischen 1,6 Millionen und 47 Millionen Freiheitsgrade besitzen mussten die Berechnungen auf dem Hochleistungsrechner der Universität Siegen *Omni* gestartet werden. Dieser besitzt mit 439 Rechenknoten mit jeweils

64 Kernen und 256 GB Arbeitsspeicher genügend Rechenleistung, um die vorhandene Problemstellung in einem vertretbaren Zeitrahmen zu lösen [17].

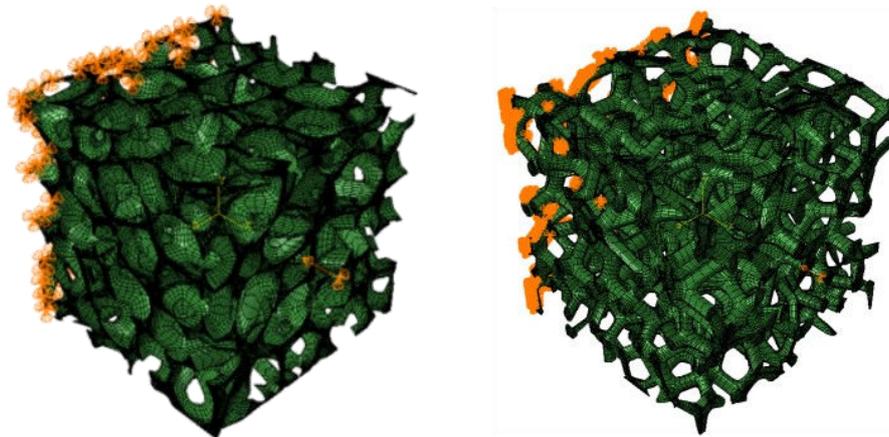


Abbildung 4.9: Randbedingungen der RVE-Konvergenzstudie für unterschiedliche offenzellige Schaumstrukturen

Für den Vergleich der ermittelten Dehnungsenergien werden diese auf das Ergebnis der Berechnung mit der höchsten Anzahl an Freiheitsgraden bezogen, siehe *Abbildung 4.10* links. Dies geschieht unter der Annahme, dass das Modell mit den meisten Freiheitsgraden den geringsten Fehler zu der nicht zu bestimmenden exakten Lösung aufweist. Der dargestellte monoton abfallende Verlauf ist typisch für das Konvergenzverhalten von FEM-Modellen auf der Grundlage von Verschiebungsrandbedingungen. Die linearen Elemente (C3D8) nähern sich mit zunehmender Elementverfeinerung der Lösung der quadratischen Berechnung (C3D20) an. Die Elemente mit reduzierter Integration (C3D8R) zeigen eine geringere Abhängigkeit von der verwendeten Anzahl der Freiheitsgrade und liefern gleichwertige Resultate, bei jedoch deutlich geringerem Rechenaufwand. Wird die Konvergenzanalyse mit einer Spannungsrandbedingung durchgeführt ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt, wobei nun der Konvergenzverlauf monoton steigend ist, siehe *Abbildung 4.10* rechts. Auch hier ergeben sich mit den linear reduzierten Elementen (C3D8R) numerische Fehler unter 1%, bei deutlich reduzierter Berechnungszeit.

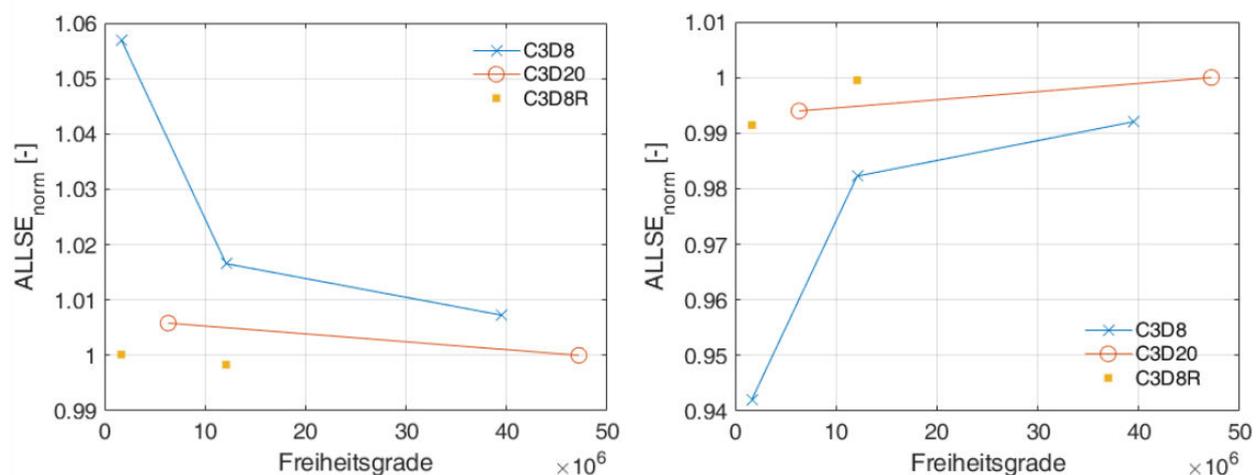


Abbildung 4.10: Konvergenzverhalten der RVE

In einer weiteren Konvergenzanalyse mit einer veränderten RVE-Mikrostruktur, durch Einstellen des Ligamentformfaktors zu $s_f = 0,4$, siehe *Abbildung 4.9* rechts, ergibt sich unter der Verwendung von Verschiebungsrandbedingungen ein analoges Konvergenzverhalten. Somit

kann für die weiteren FEM-Berechnungen angenommen werden, dass der numerische Fehler durch die Verwendung einer Elementformulierung mit reduzierter Integration gering ist.

Neben der Konvergenzanalyse, welche die Rechengenauigkeit abschätzt, ist im Rahmen der hier erzeugten stochastisch äquivalenten RVE zu prüfen, ab welcher Porenanzahl deren Deformationsverhalten wirklich repräsentativ sind. Unterschiedliche RVE mit jedoch gleichen Eingabeparametern führen aufgrund des stochastischen Generierungsverfahrens nicht unmittelbar zu den gleichen Resultaten. Zu erwarten ist, dass mit steigender Porenanzahl, innerhalb eines festen Volumens, der Unterschied äquivalenter Schäume in ihrem mechanischen Verhalten geringer wird. Im Hinblick auf die Parameterstudie ist zudem der zu erwartende stochastische Fehler von Interesse, da ein möglicher Einfluss des Parameters durch die RVE-Variationen nicht erkennbar bzw. irrelevant wird. Für die Repräsentativitätsanalyse werden jeweils 5 RVE mit einer Porenanzahl N von (50, 100, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1400, 1600, 1800, 2000) und sonst identischen Generierungsparametern erzeugt und deren Dehnungsenergien berechnet. Die Verschiebungsrandbedingungen entsprechen wie zuvor einer uniaxialen Druckbelastung um 10% der Kantenlänge eines RVEs. Zusätzlich werden pro RVE die Randbedingungen rotiert, sodass jedes gegenüberliegende Oberflächenpaar des Quaders bei der Aufbringung der Deformation berücksichtigt wird. Bei der Betrachtung von isotropen Schäumen sollte diese keinen erkennbaren Einfluss auf das Simulationsergebnis liefern. Dadurch ergeben sich jeweils 3 Simulationen für ein RVE und somit insgesamt 15 Berechnungen bei identischer Porenanzahl.

Die berechneten RVE-Dehnungsenergien sind in Abbildung 4.11, links über der Porenanzahl dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die Streuung der Ergebnisse mit zunehmender Porenanzahl abnimmt. Während die obere Intervallgrenzen max_{ALLSE} der ermittelten Dehnungsenergien annähernd auf gleichem Niveau bleiben, steigt die untere Intervallgrenze min_{ALLSE} an.

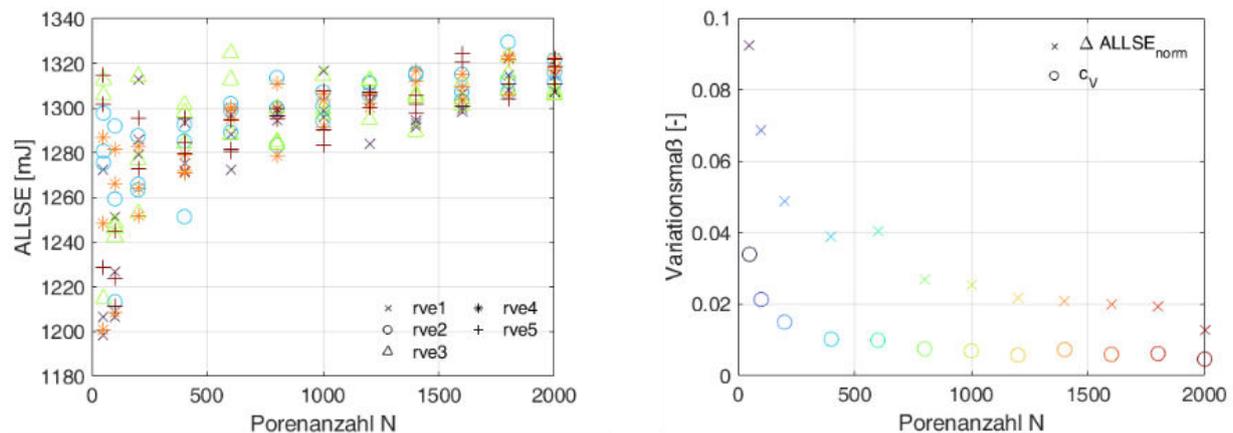


Abbildung 4.11: Repräsentativitätsanalyse zur Bestimmung der notwendigen Porenanzahl

Für eine quantitative Beschreibung der Streuung, werden nun zwei Variationsmaße eingeführt. Zum einen das normierte Dehnungsenergieintervall $\Delta ALLSE_{norm} = (max_{ALLSE} - min_{ALLSE}) / \overline{ALLSE}$, und zum anderen der Variationskoeffizient $c_v = s / \overline{ALLSE}$, wobei hier \overline{ALLSE} der gemittelten Dehnungsenergie und s der Stichprobenstreuung entsprechen. Beide Maße zeigen für eine zunehmende Porenanzahl ein abflachendes Verhalten auf, siehe Abbildung 4.11 rechts. Da oberhalb einer Porenanzahl von 800 keine signifikante Verringerung der Streuung

zu erkennen ist, der numerische Aufwand jedoch erheblich steigt, sollten die weiteren generierten RVE etwa 800 Poren beinhalten.

Im Rahmen einer betreuten Masterarbeit mit dem Thema „Numerische Untersuchung des Schwingungsverhaltens offenzelliger Schaumstrukturen“ [18] wurde neben dynamischen Betrachtungen auch das statische Materialverhalten von Elastomerschäumen untersucht. Ausgehend von der Theorie im Standardwerk „Cellular solids: Structure and properties“ von Gibson und Ashby [19] konnte mit numerischen Simulationen der Mikrostruktureinfluss auf elastische Materialkonstanten bestimmt werden. Unter der Annahme eines linear elastischen Matrixmaterials lässt sich der homogenisierte Elastizitätsmodul E^* der gesamten Struktur, als Funktion der relativen Dichte R und des Elastizitätsmoduls der Matrix E_s als

$$E^* = E_s C_1 R^2 \quad 4.2$$

angeben. Diese quadratische Abschätzung basiert auf einer vereinfachten kubischen Schaumstruktur unter Druckbelastung, bei der lediglich die Durchbiegung einzelner Streben mit Hilfe der klassischen Balkentheorie bestimmt werden. Die Mikrostrukturabhängigkeit wird durch die Konstante C_1 wiedergegeben und kann für einen spezifischen Schaum anhand von Experimenten oder Simulationen ermittelt werden. Eine systematische Bestimmung dieses Parameters eignet sich somit, den Einfluss der Schaumgeometrie auf das mechanische Deformationsverhalten zu quantifizieren. Als primäre Einflussgrößen dienen hier die relative Dichte R , der Ligamentformparameter s_f und der Variationskoeffizienten c_V der logarithmisch normalverteilten Porendurchmesser. Die notwendige Porenanzahl N konnte von den zuvor notwendigen 800 Poren auf etwa 400 Poren reduziert werden. Dies ist auf unterschiedliche Gründe zurückzuführen, zum einen wurde die aufgebrachte Dehnung auf 1% verringert und zum anderen wurden die elastischen Materialparameter des Matrixmaterials auf $E = 45 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,45$ angepasst. Des Weiteren sind für die Bestimmung von E^* nur Deformationsanteile in Belastungsrichtung relevant, wohin gegen zuvor die gesamte Dehnungsenergie betrachtet wurde. Der zu untersuchende Parameterraum ergibt sich wie folgt,

- Relative Dichte R (0,05; 0,1125; 0,175; 0,2375; 0,3)
- Ligamentformparameter s_f (0,05; 0,2; 0,35; 0,5; 0,65)
- Variationskoeffizienten c_V (0,05; 0,1625; 0,275; 0,3875; 0,5)

und ist in Abbildung 4.12 durch Gitterpunkte in einem Würfel grafisch dargestellt.

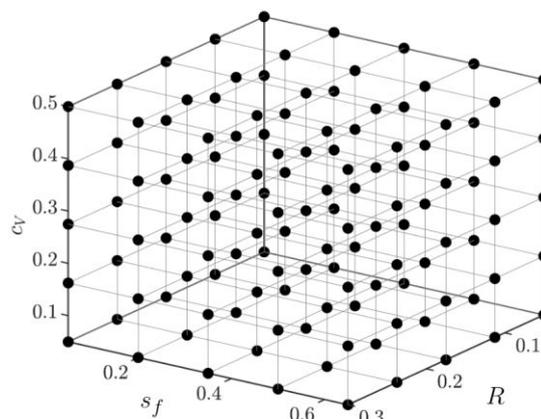


Abbildung 4.12: Darstellung des Eingangspameterraums der durchgeführten Parameterstudie

Für jede Parameterkombination werden hier jeweils 5 topologisch äquivalente RVE generiert, um mögliche stochastische Abweichungen des zu berechnenden Elastizitätsmoduls E^* zu berücksichtigen. Jeder Gitterpunkt existiert somit 5 mal. Mit diesem vollfaktoriellen Ansatz ergeben sich insgesamt 625 Einzelsimulationen, welche auf dem *Omni* Hochleistungsrechner gestartet werden. Die Berechnung des homogenisierten Elastizitätsmoduls auf Basis der FEM-Simulation eines RVEs ergibt sich zu

$$E^* = \frac{F_r}{\varepsilon_l l_{RVE}^2} \quad 4.3$$

wobei F_r der Reaktionskraft, l_{RVE} der unbelasteten RVE-Kantenlänge und ε_l der aufgetragenen Dehnung entspricht. Zunächst wird der mittlere Einfluss der Schaumkennwerte betrachtet, in dem jeweils über eine Gitterebene mit einer konstanten Kenngröße gemittelt wird. In Abbildung 4.13 ist deutlich die betrachtete quadratische Abhängigkeit des effektiven Elastizitätsmoduls E^* von der relativen Dichte R zu erkennen. Die durchgezogene Linie entspricht der angepassten Relation $E^* = E_s C_1 R^2$ mit der Konstanten $C_1 = 1,13$. Aus Abbildung 4.14 geht der mittlere Einfluss des Ligamentformparameters s_f (links) und des Variationskoeffizienten c_V (rechts) hervor. Der Ligamentformparameter führt mit zunehmender Größe zu einer Reduktion der Steifigkeit bis er den Wert $s_f = 0,5$ annimmt, anschließend steigt die Steifigkeit wieder an. Dieses Umkehrverhalten lässt sich durch den Einfluss des Ligamentformparameters auf das Flächenträgheitsmoment der Ligamente begründen. Je kompakter die Querschnittsfläche an ihrem Schwerpunkt liegt, desto geringer ist ihr Widerstand gegen Biegung. Der größte Widerstand ergibt sich, wenn Flächenelemente weit vom Schwerpunkt entfernt sind, siehe Abbildung 3.9 c). Wird nun zusätzlich Abbildung 3.8 betrachtet, ergeben sich je nach Skalierung der Dreiecke, zwei Extrempunkte, in denen die entstehenden Querschnittsflächen ein hohes Flächenträgheitsmoment besitzen. Ein Minimum entsteht durch die Bildung eines regelmäßigen Sechseckquerschnittes, welcher infolge der nachgelagerten Oberflächenglättung eine kreisförmige Form annimmt. Wird der Einfluss des Variationskoeffizienten auf den effektiven Elastizitätsmodul mit den Parametern R und s_f verglichen, kann dieser nahezu vernachlässigt werden.

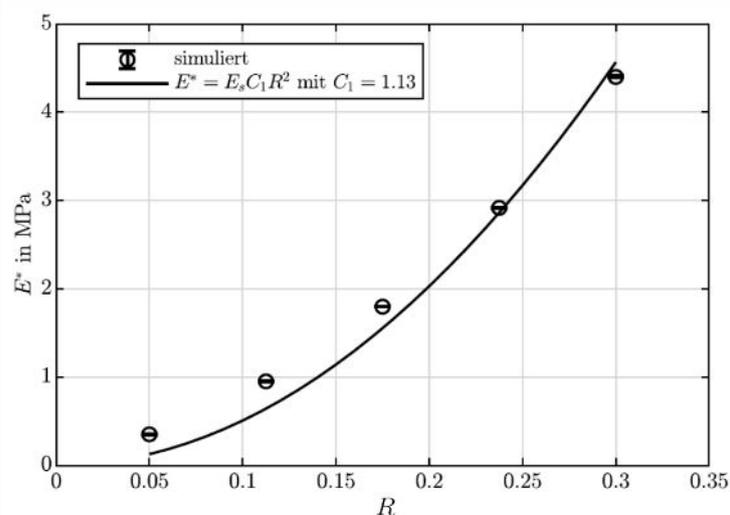


Abbildung 4.13: Gemittelter Einfluss der relativen Dichte auf den Elastizitätsmodul

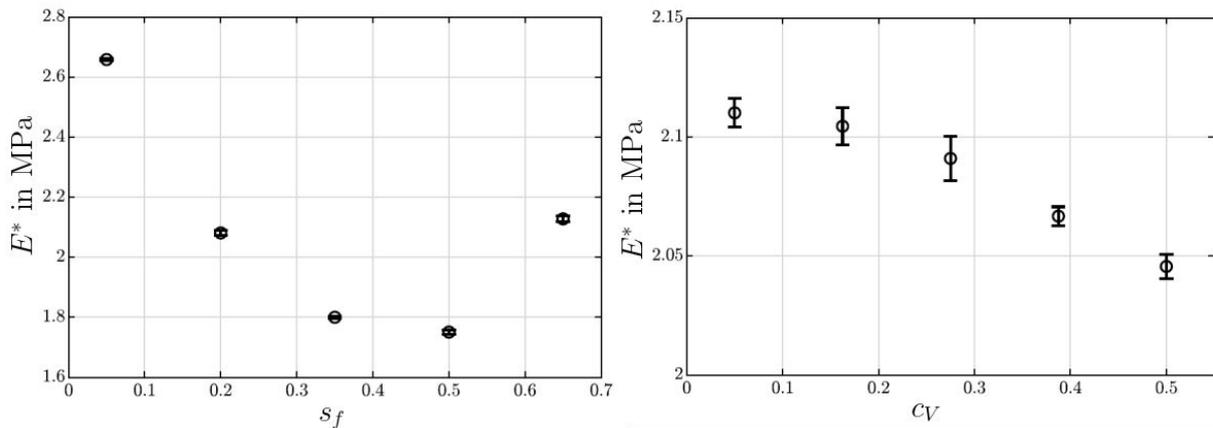


Abbildung 4.14: Gemittelter Einfluss des Ligamentformfaktors (links) und des Variationskoeffizienten (rechts) auf den Elastizitätsmodul

Durch eine entkoppelte Betrachtung in Abbildung 4.15 werden Wechselwirkungen zwischen einzelnen Parametern deutlich. Die Steifigkeit E^* wird nun durch Isolinien von R in Abhängigkeit von s_f und c_V aufgetragen. Während der Einfluss von s_f mit größer werdenden R steigt, ergeben sich zwischen c_V und R keine erkennbaren Wechselwirkungen auf den homogenisierten Elastizitätsmodul E^* . Die in Abbildung 4.14 dargestellten Punkte ergeben sich unmittelbar durch die Mittelung der Daten in Abbildung 4.15. Aufgrund der quadratischen Abhängigkeit von R dominieren die Isolinien mit einer großen relativen Dichte die berechneten Mittelungswerte, wodurch sich der signifikante Verlauf in Abbildung 4.14 links ergibt. Dieser ist jedoch streng genommen nur für höhere relative Dichten aussagekräftig.

Durch die Bestimmung eines Kennfeldes von $C_1(R, s_f)$ lassen sich die Ergebnisse der durchgeführten RVE-Parameterstudie gut zusammenfassen, wobei die Abhängigkeit des Variationskoeffizienten c_V vernachlässigt wurde. Das resultierende Kennfeld ist in Abbildung 4.16 links dargestellt. Mit einer analogen Herangehensweise konnte mit der durchgeführten Parameterstudie auch der Einfluss der Mikrostruktur auf die effektive Querkontraktionszahl ν^* bestimmt werden, welche über das Verhältnis der Querdehnung zur Längsdehnung definiert ist. Auch hier ergibt sich wieder kein nennenswerter Einfluss des Variationskoeffizienten c_V auf das makroskopische Deformationsverhalten. Das berechnete Kennfeld ist ebenfalls in Abbildung 4.16, rechts dargestellt. Zu erkennen ist, dass für Schäume mit einer relativen Dichte $R = 0,3$ der Ligamentfaktor s_f nur noch einen geringfügigen Einfluss besitzt, sodass die Abschätzung $\nu^* = 0,33$ eine gute Näherung für offenzellige Schäume liefert.

Mit Hilfe der numerisch berechneten Kennfelder lassen sich nun für beliebige Schaumvariationen, deren mikrostrukturellen Größen innerhalb der Interpolationsgrenzen liegen, das makroskopische linear elastische Deformationsverhalten beschreiben. Weiterführende Parameterstudien, welche ein hyperelastisches Materialverhalten des Matrixmaterials berücksichtigen, konnten aufgrund der dann notwendigen nichtlinearen FEM nicht durchgeführt werden. Der Grund liegt in Konvergenzproblemen im Newton Iterationsverfahren, welche sich durch stark verzerrte Elemente der generierten RVE ergeben. Eine umfassende Überarbeitung des verwendeten Vernetzungsalgorithmus konnte innerhalb der zweijährigen Projektlaufzeit jedoch noch nicht stattfinden und steht somit noch aus. Daher konnte auch die Validierung des makromechanischen Hohl ellipsoid Modells in AP 6 anhand von mikrostrukturellen RVE-Simulationen nicht

durchgeführt werden. Alternativ erfolgte jedoch eine Validierung des Hohlkugelansatzes von Danielsson [2], welche im Weiteren beschrieben wird.

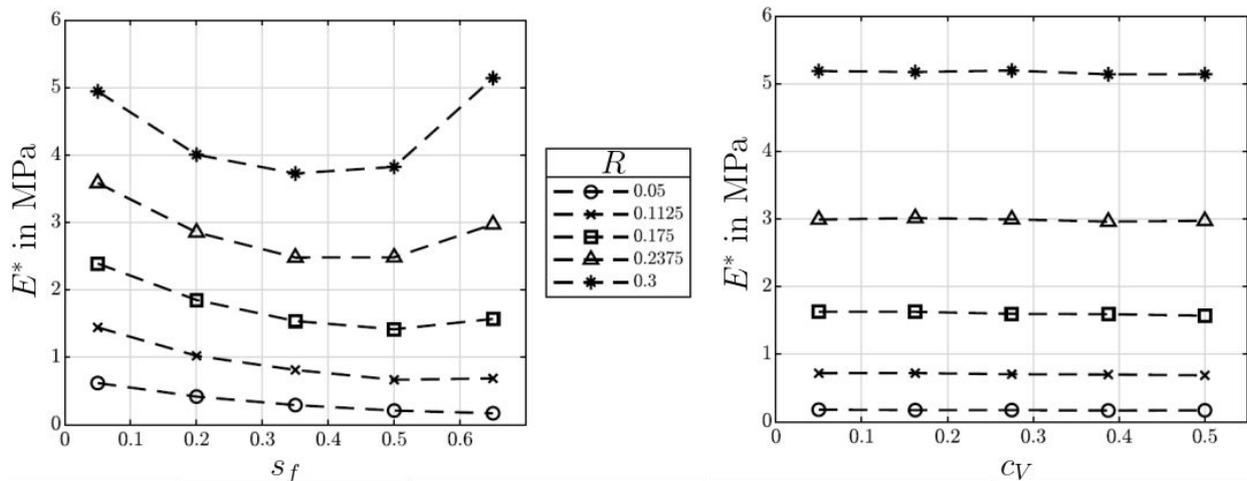


Abbildung 4.15: Darstellung der Wechselwirkung zwischen dem Ligamentformfaktor (links), dem Variationskoeffizienten (rechts) und der relativen Dichte

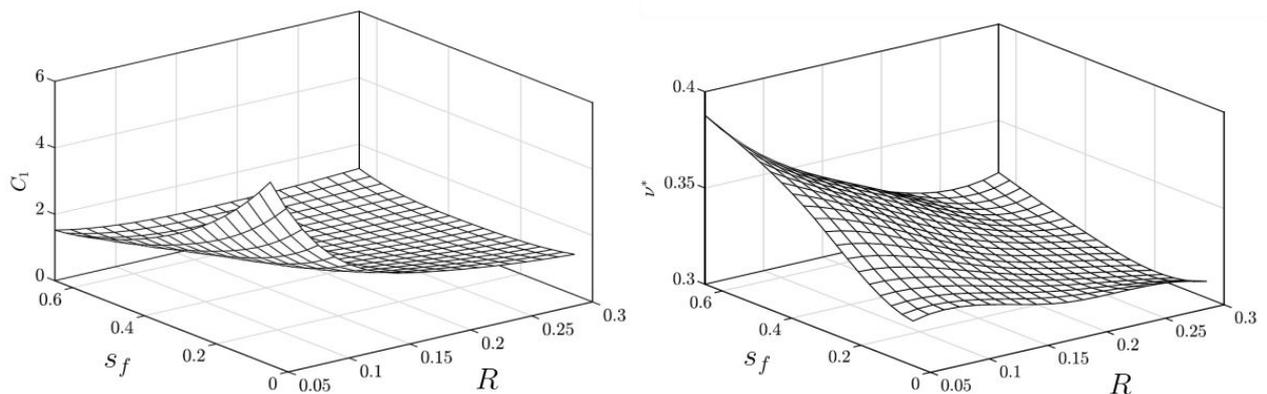


Abbildung 4.16: Ermittelte Kennfelder für die Konstante C_1 in Zusammenhang mit 4.3 und der Querkontraktionszahl für die Bestimmung des linear elastischen Deformationsverhaltens von offenporigen Schäumen

Neben der Erzeugung von topologisch äquivalenten Schäumen und deren FEM-Simulation wurde des Weiteren ein numerischer Hohlkugelansatz für geschlossenzellige Schäume mit dem analytischen Hohlkugelansatz von Danielsson [2] verglichen. Der numerische Ansatz ist aus der Veröffentlichung „A micromechanical model of distributed damage due to void growth in general materials and under general deformation histories“ [20] entnommen und verwendet besondere FEM-Ansatzfunktion, welche auf radialen Ansatzfunktionen R_r und sphärisch harmonischen Funktionen Y_{lm} basieren. Da die mechanischen Spannungen und Deformationen in jedem Materialpunkt innerhalb der Hohlkugel durch das Ritz-Galerkin Verfahren berechnet werden, handelt es sich um ein mikromechanisches Materialmodell. Durch eine anschließende Volumenmittelung lassen sich jedoch beide Verfahren miteinander vergleichen. In der ursprünglichen Publikation wird der numerische Ansatz in Kombination mit einem Hohlkugelraumfüllungsalgorithmus im Sinn einer FE²-Methode angewandt und als Packed Hollow Sphere (PHS) Modell benannt. Die Ansatzfunktionen sind in Abbildung 4.17 beispielhaft skizziert. Zudem ist ein nicht homogener Verschiebungsverlauf der Hohlkugel dargestellt.

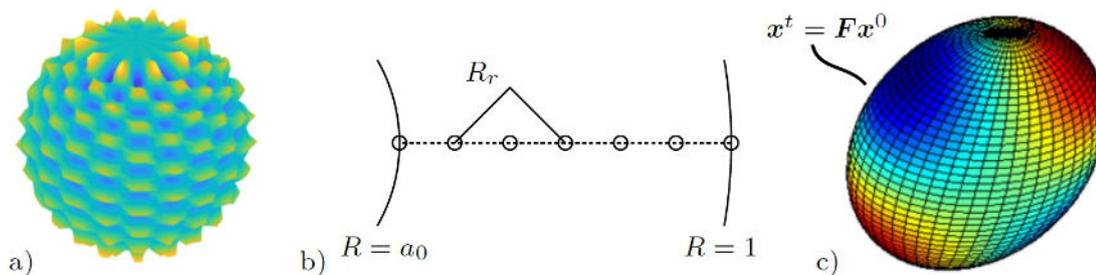


Abbildung 4.17: Numerisches Hohlkugelmodell: a) sphärische Ansatzfunktion, b) radiale Ansatzfunktion, c) ermitteltes Verschiebungsfeld

Für den Vergleich der Verfahren ist der Überbau mittels des Raumfüllungsalgorithmus jedoch nicht notwendig. Beide Methoden verwenden die auf der Hohlkugel aufbauende Kinematik, unterscheiden sich jedoch in dem zu nutzenden Materialmodellen für das Matrixmaterial. Während für die analytische Herangehensweise ein inkompressibles hyperelastisches Materialmodell benötigt wird, baut der numerische Ansatz aus Konvergenzgründen auf kompressiblen Modellen auf. Daher wird im Weiteren zum einen ein inkompressibles Neo-Hooke Modell $\rho_0 \psi_{NH} = \mu/2 (I_1 - 3)$ für den Danielsson Ansatz (NHD) und zum anderen ein kompressibles Neo-Hooke Modell $\rho_0 \psi_{NH}^{komp} = \mu/2 (\bar{I}_1 - 3) + K/2 (J - 1)^2$ für das PHS-Modell verwendet, wobei die erste Invariante des rechten Cauchy-Green Tensors mit I_1 und der inkompressible Anteil mit \bar{I}_1 dargestellt wird. Der Schubmodul μ und der Kompressionsmodul K stellen die elastischen Materialkonstanten dar und definieren über die aus der linearen Elastizitätstheorie bekannte Beziehung die Querkontraktionszahl $\nu = (3K - 2\mu)/(6K + 2\mu)$. Diese wird hier genutzt, um den Effekt der notwendigen Kompressibilität des PHS-Modells zu verdeutlichen, da bekannterweise für $\nu = 0,5$ inkompressibles Materialverhalten vorliegt. Die Modelle werden für die Fälle einer volumetrischen Aufweitung und einer einfachen Scherdeformation miteinander verglichen, wobei sowohl die Porosität ϕ (0,05; 0,15; 0,3) als auch die Querkontraktionszahl ν (0,475; 0,48; 0,495) variiert wird. Der Schubmodul μ beträgt in den Untersuchungen 2 MPa.

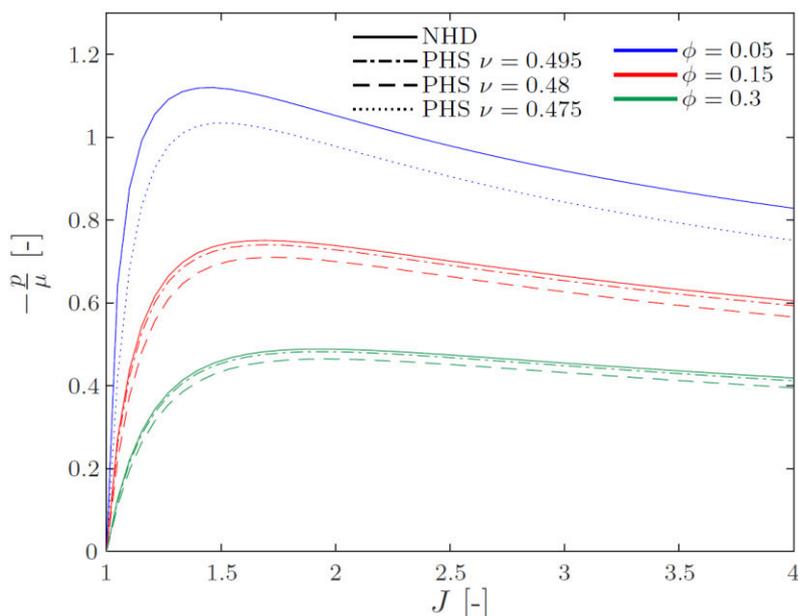


Abbildung 4.18: Vergleich der Druckantwort des analytischen und numerischen Hohlkugelansatzes bei volumetrischer Expansion

Für den rein volumetrischen Fall sind in Abbildung 4.18 die Resultate als Auftragung des normalisierten Drucks $-p/\mu$ über die Volumenänderung J dargestellt. Qualitativ ist der typisch nicht monotone Druckverlauf aus Kavitationsuntersuchungen zu erkennen. Zudem führt eine höhere Porosität ϕ erwartungsgemäß zu einem niedrigeren Spannungsniveau. Wird der Einfluss der Querkontraktionszahl ν betrachtet, ist zu erkennen, dass für $\nu \rightarrow 0,5$, also mit abnehmender Kompressibilität, das PHS-Modell gegen das analytische Modell konvergiert. Ähnliche Resultate ergeben sich unter einer einfachen Scherbelastung, welche nur gestaltsändernde Anteile beinhalten. Die normalisierte Schubspannung τ/μ steigt linear mit der aufgebrachten Gleitung γ an, wie in Abbildung 4.19 zu sehen ist. Auch hier konvergiert der numerische Ansatz gegen das Danielsson Modell. Aus diesen Untersuchungen folgt, dass der analytische Ansatz von Danielsson durch die numerische Herangehensweise von Reina zur homogenisierten Berechnung einer deformierbaren Hohlkugel verifiziert werden kann. Die Resultate des Modellvergleichs wurden zusammen mit ergänzenden viskoelastischen Betrachtungen unter dem Titel „Time-dependent modeling and experimental characterization of foamed EPDM rubber“ [21] frei zugänglich veröffentlicht. Eine Erweiterung des Danielsson Ansatzes auf ellipsoidförmige Poren erfolgte im Rahmen dieses Projektes in AP 6.

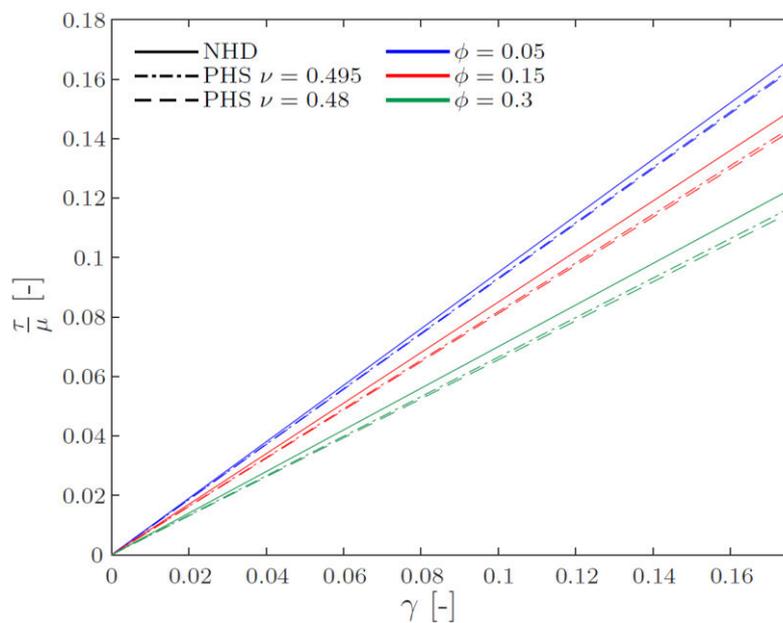


Abbildung 4.19: Vergleich der Schubspannung des analytischen und numerischen Hohlkugelansatzes bei einfacher Scherung

4.3 AP 4: Additive Fertigung repräsentativer Schäume und Experimente (Siegen)

4.3.1 Additive Fertigung

Neben der beschriebenen konventionellen Fertigung von Elastomerschäumen im Abschnitt 4.1 konnten auch additiv gefertigte Schäume in einem vergrößerten Maßstab hergestellt werden. Bei den mittels eines Stereolithografie-Druckers der Firma *Formlabs* 3d gedruckten Schäumen handelt es sich um die in Abschnitt 4.2.1 generierten RVE. Durch die Möglichkeit des Exports der Geometrie innerhalb des Generierungstools als stl-Datei, lässt sich diese problemlos in entsprechende Software für den 3D-Druck einbinden, welche ein dreidimensionales Objekt in einzelne Schichten aufteilt. Verfahrensbedingt lassen sich jedoch nur offenporige Strukturen

fertigen, da das zunächst flüssige Kunstharz während den einzelnen Prozessschritten abfließen muss.

In diesem Projekt werden die technischen Kunstharze „flexible resin“ und „elastic resin“ [22] verwendet. Diese sind am ehesten mit dem Matrixmaterialverhalten von konventionell gefertigten Elastomerschäumen vergleichbar. Im ersten Schritt wurden zwei unterschiedlich große RVE aus dem weicheren „elastic resin“ gefertigt, um ein mögliches Zusammenfallen der Struktur während des Druckprozesses abzuschätzen. Innere Stützstrukturen, welche normalerweise das Druckverfahren robuster machen, wurden hier unterdrückt, da ein nachgelagertes Trennen der gedruckten Hilfsstruktur im inneren des Schaums nicht möglich ist. Die Druckergebnisse sind in Abbildung 4.20 zu sehen, wobei das linke RVE eine Kantenlänge von 60 mm und das rechte RVE eine Kantenlänge von 20 mm besitzen. Die Porosität ϕ liegen bei 0,85 (links) und 0,8 (rechts). Neben RVE wurden auch klassische Schulterproben, sogenannte S2-Zugstäbe nach DIN 53504 [23], mit unterschiedlicher Druckorientierung gefertigt, um das Deformationsverhalten des „Matrixmaterials“ eines gedruckten RVE separat mit einer Zugprüfmaschine charakterisieren zu können.

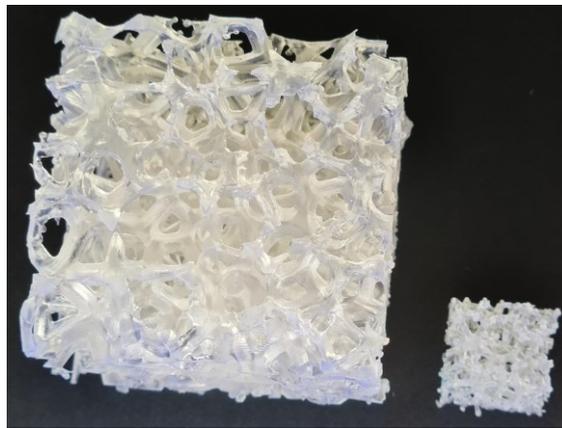


Abbildung 4.20: Additiv gefertigte repräsentative Volumenelemente mit einer Kantenlänge von 60 mm (links) und 20 mm (rechts)

4.3.2 Experimentelle Untersuchung

Die Materialcharakterisierung des hyper- und viskoelastischen Materialverhaltens erfolgt aktuell in einer vom Lehrstuhl für Festkörpermechanik betreuten Abschlussarbeit mit dem vorläufigen Titel „Experimentelle Charakterisierung von additiv gefertigten Zugproben“. In dieser wird insbesondere eine mögliche Richtungsabhängigkeit untersucht, welche durch den schichtweisen Aufbau des Fertigungsverfahrens begründet ist. Für die Durchführung wird eine Universalprüfmaschine der Firma Hegewald & Peschke mit einer maximal zulässigen Last von 2kN verwendet.

Das beobachtete Materialverhalten des Vollmaterials überträgt sich auch auf das Deformationsverhalten eines additiv gefertigten RVE. In einem Druckversuch eines RVE aus dem *elastic resin* mit einer Porosität von $\phi = 0,85$ und 200 logarithmisch normalverteilten Poren konnten bei einer mehrmaligen Belastung bis zu einer Stauchung von 30%, sowohl Schädigungseffekte als auch eine Richtungsabhängigkeit gemessen werden. Die in Abbildung 4.21 dargestellten Kraft/-Stauchungskennlinien entsprechen qualitativ zunächst dem klassischen Verformungsverhalten eines Elastomerschaums unter Druckbelastung. Zu Beginn ist die hohe Steifigkeit durch Biegebelastungen der Ligamentstruktur definiert, während das Abflachen der

Kurve durch Knickungsvorgänge und der damit reduzierten Steifigkeit zu erklären ist. Bei den ersten drei Messungen des RVE wurde die Belastungsrichtung des quaderförmigen RVE variiert (durch gezogene Linien). Zu erkennen ist, dass die gemessenen Verformungskennlinien verschieden sind und sich das verwendete RVE somit anisotrop verhält. Durch eine Erhöhung der Porenanzahl lässt sich diese Abhängigkeit von der Belastungsrichtung reduzieren, wie bereits aus den Simulationsergebnissen im Abschnitt 4.2.2 zu sehen ist. Nach der erstmaligen Deformation in jede Belastungsrichtung wurde das RVE ein weiteres Mal in jede Richtung belastet, siehe Strich-Punktlinien. Der Unterschied zu den vorherigen Kennlinien, kann mit Schädigungseffekten innerhalb der Struktur oder des Matrixmaterials, aber auch mit nicht zu vernachlässigen inelastischen Effekten zusammenhängen.

Aufgrund des nicht zu erwartenden komplexen und nicht reproduzierbaren Deformationsverhaltens der RVE bei großen Deformationen, können die gemessenen Kennlinien nicht unmittelbar zur Validierung der Berechnungsergebnisse in Abschnitt 4.2.2 verwendet werden, da zum einen die Schädigungsmechanismen genauer untersucht und modelliert werden müssen und zum anderen die RVE-Simulationen mit der Berücksichtigung von großen Verschiebungen noch nicht zuverlässig durchgeführt werden konnten.

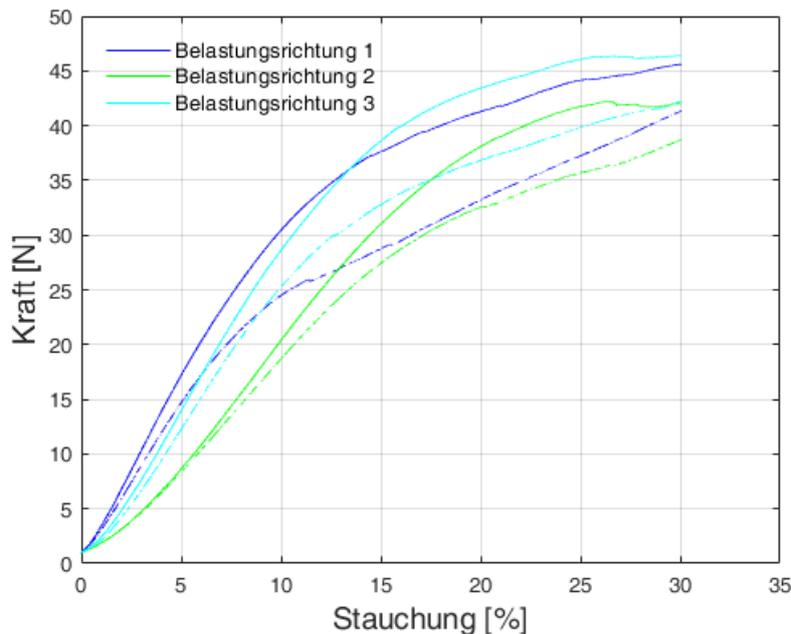


Abbildung 4.21: Druckversuche an einem additive gefertigten RVE mit unterschiedlichen Belastungsrichtungen

4.4 AP 5: Mikroskopische Untersuchungen (Siegen)

4.4.1 Computer-Tomographische und Auflichtmikroskopie-Untersuchungen

Die interne Struktur der hergestellten Schäume wurde zunächst mittels des bildgebenden Verfahrens der Mikro-Computertomographie (Mikro-CT) charakterisiert. Hierbei wird auf der Grundlage von zweidimensionalen Röntgenbildern eine dreidimensionale Darstellung des untersuchten Objekts generiert, bei welcher neben der äußeren Gestalt auch das Objektinnere erfasst wird. Jedem Voxel der Aufnahme ist ein Grauwert zugewiesen, der mit der Dichte an der

jeweiligen Position korreliert. Der Wortteil „Mikro“ beim Begriff „Mikro-CT“ soll in diesem Zusammenhang darauf hindeuten, dass die Kantenlänge der Voxel im Mikrometerbereich liegt.

Alle im Projekt getätigten CT-Aufnahmen wurden mit dem Gerät *Phoenix Nanotom*® des Herstellers *General Electric* gemacht, wobei für das Post-Processing das Software-Paket *VG Studio Max 3.4* verwendet wurde. Die Rekonstruktion des 3D-Bildes wurde auf der Grundlage von 1500 (zweidimensionalen) Röntgenbildern durchgeführt, welche mit einer Röhrenspannung von 100 kV aufgenommen wurden. Für eine Verbesserung der Bildqualität wurden die Korrekturverfahren „Beam Hardening Correction“ und „Noise Reduction“ verwendet.

Trotz des relativ großen Dichteunterschieds zwischen Porengas und der Elastomermatrix, ist das Setzen eines Schwellwerts für eine Unterscheidung nicht ausreichend, da die Aufnahmen in der Regel ein ausgeprägtes Bildrauschen aufweisen. Dies kann durch diverse Filter (bzw. Mittelungsverfahren) soweit reduziert werden, dass Pore und Matrix zwei voneinander getrennte Grauwertbereiche einnehmen. Diese Zuordnung ist jedoch an den Grenzflächen zwischen Porenraum und Elastomermatrix nicht eindeutig. Um zu gewährleisten, dass diese Zuordnung möglichst realitätsnah ist, sollte geprüft werden, ob der Porenvolumenanteil in der binarisierten CT-Aufnahme der makroskopischen (über Dichtemessungen bestimmten) Porosität entspricht. Ist dies der Fall, kann die Charakterisierung der Mikrostruktur mittels diverser Algorithmen erfolgen. Industriennahe Software bietet hierbei üblicherweise die Möglichkeit, die Porenform einer jeden Pore mit der sogenannten Sphärizität

$$S = \frac{O_{Kugel}}{O_{Pore}} \quad 4.4$$

zu beschreiben, wobei O_{Pore} der Porenoberfläche und O_{Kugel} der Oberfläche einer Kugel mit äquivalentem Volumen entspricht. Ein ähnlicher Kennwert ist die sogenannte Kompaktheit

$$C = \frac{V_{Pore}}{V_{Umkugel}}, \quad 4.5$$

bei welcher das Volumen der Umkugel der Pore $V_{Umkugel}$ als Bezugsgröße für das Porenvolumen V_{Pore} verwendet wird. Mit steigendem S und C nähert sich die Porenform einer Kugel an; bei $S = C = 1$ liegt schließlich eine perfekte Kugelform vor. Eine sehr anschauliche Aussage zur vorliegenden Anisotropie, bieten die Porenanisotropiefaktoren

$$A_{i/j} = (A_{j/i})^{-1} = \frac{\max(x_i) - \min(x_i)}{\max(x_j) - \min(x_j)}. \quad 4.6$$

Hierbei wird die maximale Porenausdehnung $\max(x_i) - \min(x_i)$ in die Richtung der Koordinate x_i auf die maximale Porenausdehnung $\max(x_j) - \min(x_j)$ in die Richtung der dazu orthogonalen Koordinate x_j bezogen. Es sei angemerkt, dass die Porenanisotropiefaktoren nicht invariant sind und somit von der Wahl der Basis des Koordinatensystems abhängen. Im Rahmen der im vorliegenden Abschlussbericht vorgestellten Ergebnisse entspricht die z-Richtung stets der Richtung des Auftreibens.

Für eine genauere Untersuchung der Porenstruktur wurden drei Industrieschäume der Firma ESN selektiert, im Folgenden als ESN-I, ESN-II und ESN-III bezeichnet. Eine detaillierte Übersicht zu den Ergebnissen der mikrostrukturellen Charakterisierung ist für den Schaum „ESN-II“ in Abbildung 4.22 gegeben. Eine Gegenüberstellung der wesentlichsten Kennwerte aller

untersuchten Industrieschäume von ESN ist in Tabelle 4.7 gegeben, wobei für die Sphärizität, die Kompaktheit und die Anisotropiefaktoren der mit dem Porenvolumen gewichtete Durchschnitt angegeben ist.

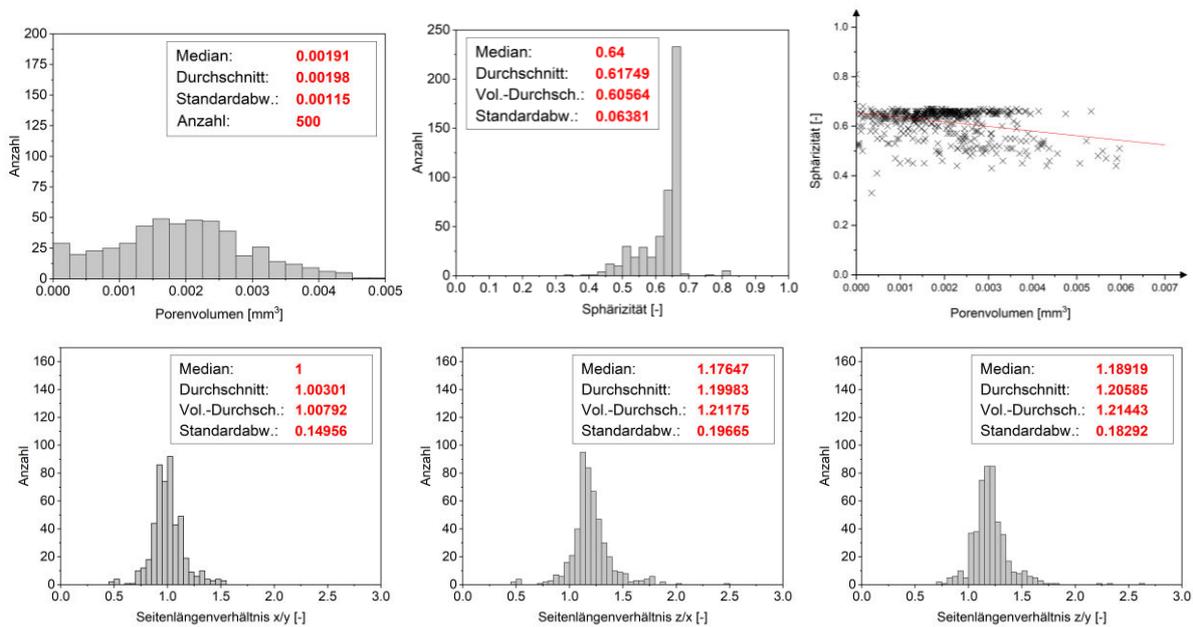


Abbildung 4.22: Ergebnisse der Mikrostrukturcharakterisierung mit der kommerziellen Software VG Studio Max 3.4 für den Schaum ESN-II

Es zeigt sich, dass der Grad der Anisotropie und die durchschnittliche Porengröße mit steigender Porosität zunehmen. Die Poren sind hierbei in der Richtung des Auftreibens – also in z-Richtung – länger als in x- und in y-Richtung.

	ESN-I	ESN-II	ESN-III
Porosität [-]	14,7 %	29,6 %	50,8 %
Porengröße [mm³] (Durchschnitt)	0,00085	0,00203	0,00656
Sphärizität [-] (Volumenbez. Durchschnitt)	0,61611	0,60564	0,49227
Kompaktheit [-] (Volumenbez. Durchschnitt)	0,52	0,52	0,34
A_{x/y} (Volumenbez. Durchschnitt)	0,994	1,007	1,046
A_{z/x} (Volumenbez. Durchschnitt)	1,043	1,211	1,554
A_{z/y} (Volumenbez. Durchschnitt)	1,096	1,214	1,554

Tabelle 4.7: Ergebnisse der Mikrostrukturcharakterisierung mit der kommerziellen Software VG Studio Max 3.4 für die Schäume ESN-I, ESN-II und ESN-III

Des Weiteren wurde die Mikrostruktur von diversen DIK-Eigenherstellungen charakterisiert. Die detaillierten Ergebnisse für die Schaumprobe „DIK-4“ sind Abbildung 4.23 zu entnehmen. Die wesentlichsten mikrostrukturellen Kennwerte sind für weitere Eigenherstellungen in Kapitel 4.5.5.2 aufgeführt. Grundsätzlich zeigen die DIK-Eigenherstellungen sehr viel größere Poren und ein wesentlich inhomogeneres Porenbild als die ESN-Schäume.

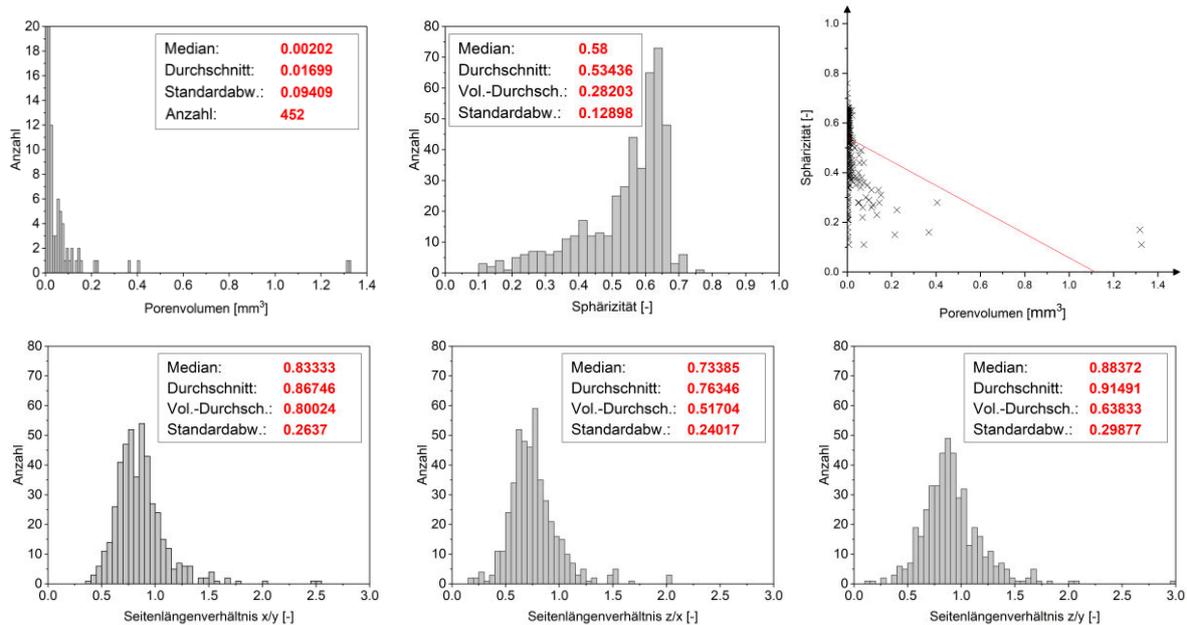


Abbildung 4.23: Ergebnisse der Mikrostrukturcharakterisierung mit der kommerziellen Software VG Studio Max 3.4 für den Schaum „DIK-4“

4.4.2 Auswertung CT-Untersuchungen

Bevor in AP 3 Designphase (Abschnitt 4.2.1) zahlreiche RVE für die FEM-Simulationen erzeugt werden, wird zunächst überprüft, ob die generierte RVE-Mikrostruktur den vorgegebenen Eingabewerten des Generierungsalgorithmus entspricht. Falls dies nicht der Fall sein sollte, ergeben sich im Rahmen der FEM-Simulationen falsche Rückschlüsse bezüglich des Mikrostruktureinflusses auf das elastische Deformationsverhalten. Umgekehrt dient die Validierung auch als Absicherung der verwendeten Methode zur Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der intrinsischen Volumina.

Die Validierung erfolgt mit der zuvor beschriebenen Mikrostrukturcharakterisierung und wird aufgrund des numerischen Aufwands beispielhaft anhand eines Designschaums durchgeführt. Hierzu wird der erstellte Volumenkörper zunächst virtuell geschnitten und so eine Sequenz von zweidimensionalen Schichtaufnahmen erzeugt. Dies entspricht einem künstlichen CT-Datensatz eines Schaums, deren Mikrostruktur nun mit Hilfe des Auswertungsalgorithmus analysiert wird. Die vorgegebenen Poren $N = 1000$ konnten durch das Verfahren segmentiert werden, siehe Abbildung 4.24, und die berechnete Porosität $\phi = 0,81$ stimmt mit der Vorgabe von $\phi = 0,8$ gut überein. Die Durchmesser der einzelnen Poren $d_{eq,i}^*$ konnten mit dem Konzept der intrinsischen Volumina ermittelt werden. Durch eine nachgelagerte Parameteranpassung einer logarithmischen Normalverteilungsfunktion an die ermittelten Porendurchmesser, konnte der tatsächliche Variationskoeffizient zu $c_V = 0,14$ mit dem vorgegebenen Wert von $c_V = 0,2$ verglichen werden. Die Abweichung ist dem Generierungsalgorithmus geschuldet, da die dichteste Packung der durchmessergrößenverteilten Poren unabhängig von der Zielporosität gewählt werden muss.

Unabhängig von der Validierung der Eingabeparameter konnten durch die Mikrostrukturcharakterisierung weitere Parameter bestimmt werden, welche den Designschaum topologisch beschreiben. Eine negative Euler-Charakteristik $\chi = -6759$ weist eindeutig auf einen

offenporigen Schaum hin. Die Dichten des Integrals der mittleren Krümmung M_V und der Oberfläche S_V charakterisieren indirekt die Form der Ligamente. Kleine Werte ergeben sich durch große verbundene Poren. Der Strukturmodellindex $f_{SMI} = 1,62$ kann geometrisch nicht direkt interpretiert werden, liefert aber einen dimensionslosen Kennwert mit, welcher die Geometrie beschrieben werden kann. Die niedrige Knotendichte N_V deutet ebenfalls auf große verbundene Poren hin. Aus der spezifischen Ligamentlänge L_V lässt sich zum einen eine Gesamtligamentlänge von 23 m und in Kombination mit der Knotendichte und der Annahme von 4 Ligamenten pro Knoten zum anderen eine mittlere Ligamentlänge von 13,7 mm ermitteln. Die mittlere Querschnittsform ergibt sich aus den Parametern \bar{u} , \bar{d}_{eq}° und \bar{a} , siehe Tabelle 4.8. Der Porenraum wird durch die 545 Poren, welche komplett innerhalb des betrachteten Materialausschnittes liegen, beschrieben. Vom Rand geschnittene Poren werden bewusst nicht berücksichtigt, da deren Volumen und Gestalt nicht exakt bestimmt werden können. Der gemessene mittlere Porendurchmesser beträgt $\bar{d}_{eq}^\circ = 11,10 \text{ mm}$. Alle drei mittleren Formfaktoren \bar{f}_i weichen von der kugelförmigen Pore ab.

Als Ergebnis der durchgeführten Validierung des RVE-Generierungstools bzw. der Mikrostrukturcharakterisierung lässt sich nun feststellen, dass die verwendeten Algorithmen zuverlässige Ergebnisse liefern und somit sich zum einen für die Charakterisierung von realen Elastomerschäumen eignen und zum anderen der Mikrostruktureinfluss auf das Deformationsverhalten anhand einer RVE-Parameterstudie ermittelt werden kann. Zu beachten bleibt jedoch die Abweichung des vorgegebenen und tatsächlichen Variationskoeffizienten.

Die Mikrostrukturcharakterisierung erfolgt nun an drei Schaumstoffproben der Firma *ESN Deutsche Tischtennis Technologie GmbH* aus dem Projektbegleitenden Ausschuss. Das rekonstruierte Matrixmaterial und der separierten Porenraum sind jeweils in Abbildung 4.25 dargestellt. Die untersuchten Volumina ergeben sich zu $4,09 \text{ mm} \times 4,45 \text{ mm} \times 1,32 \text{ mm}$ (ESN-I), zu $2,97 \text{ mm} \times 3,25 \text{ mm} \times 1,31 \text{ mm}$ (ESN-II) und zu $2,15 \text{ mm} \times 2,08 \text{ mm} \times 1,31 \text{ mm}$ (ESN-III). Die berechneten mikrostrukturellen Größen sind in der Tabelle 4.9 bis Tabelle 4.11 zu finden. Während die Schaumproben ESN-I und ESN-II eine positive Euler-Charakteristik χ aufweisen und somit einen geschlossenporigen Struktur beschreiben, besitzt die dritte Schaumprobe eine negative Charakteristik, was zunächst auf eine offenzellige Struktur deutet. Jedoch ist die Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V wie bei den beiden anderen Proben negativ, sodass diese Kombination von negativer Euler-Charakteristik und mittlerer Krümmung auf eine gemischtzellige Struktur hinweist. Durch den Vergleich der Porengrößen aus Abbildung 4.25 und der Oberflächendichten S_V der Proben ist anschaulich zu erkennen, dass mit größer werdender Dichte die Porendurchmesser ebenfalls steigen. Die Porosität ϕ variiert dementsprechend ebenfalls von 0,18 über 0,28 zu 0,54. Der hohe Porenanteil von über 50% für die Probe ESN-III deutet ohne die Berücksichtigung der vorherigen Parameter eher auf einen offenporigen Schaum hin, wobei sich jedoch aufgrund der negativen mittleren Krümmung M keine charakteristischen Größen für offene Strukturen berechnen lassen. Während bei den zuvor untersuchten offenzelligen Strukturen in Abbildung 3.4 und Abbildung 4.24 der Strukturmodellindex f_{SMI} positiv war nähert er sich bei allen Proben mit negativen Werten dem Wert Null an. Ein im Vergleich hoher negativer Wert weist also auf eine Schaumstruktur mit geschlossenen Poren hin. Die Anzahl der erkannten Poren N im untersuchten Materialausschnitt sinkt mit zunehmender mittlerer Sehnenlänge \bar{l} der Poren. Dieser Sachverhalt wird auch durch die mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi wiedergegeben, welche sich von 294 1/in auf 162/in fast halbiert. Die berechneten mittleren Porendurchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}° entsprechen jeweils den

Erwartungswerten $E[d_{eq}^*]$ der ermittelten Porendurchmesserverteilungsfunktion unter der Annahme einer Extremwertverteilung, welche hier im Vergleich der zuvor betrachteten logarithmisch Normalverteilungsfunktion die detektierten Porengrößen besser abbildet. Der zugehörige Variationskoeffizient c_V steigt von 0,18 auf 0,28 an. Werden die mittleren Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ der Proben miteinander verglichen sind diese für die Probe ESN-I und ESN-II identisch und entsprechen annähernd den Werten einer Kugel. In der Probe ESN-III hingegen weichen die Poren von der Kugelform ab und entsprechen Ellipsoiden und eignet sich somit für einen experimentellen Vergleich des Deformationsverhaltens mit dem in Abschnitt 4.5 hergeleiteten Hohl ellipsoid-Materialmodell.

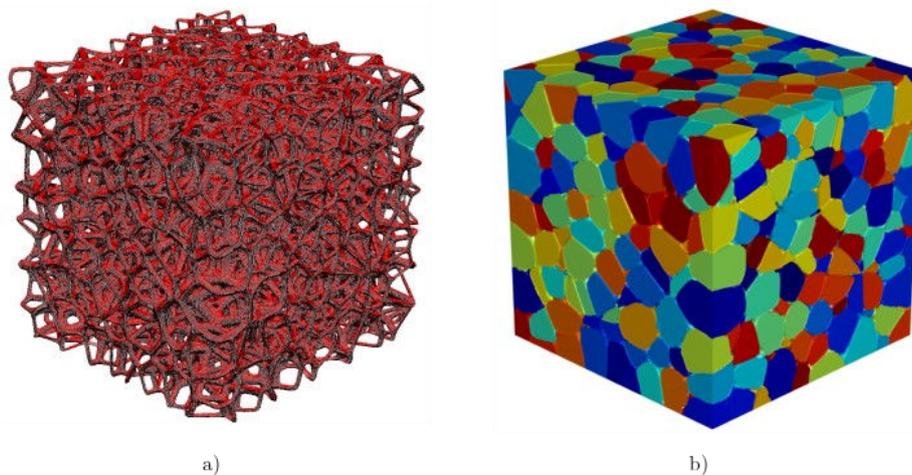


Abbildung 4.24: Ligamentsystem a) und Porenraum b) eines künstlichen Schaummodells

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	-0,0068 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	0,0591 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	0,2897 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,1912; 0,8088
Strukturmodellindex f_{SMI}	1,6169
Knotendichte N_V	0,0068 1/mm ³
spezifische Ligamentlänge L_V	0,0233 1/mm ²
mittlerer Strebenumfang \bar{u}	12,45 mm
mittlerer Strebendurchmesser bei gleichem Kreisumfang \bar{d}_{eq}^o	3,96 mm
mittlere Strebenquerschnittsfläche \bar{a}	8,22 mm ²
Anzahl an inneren Poren N	545
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	11,17 mm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	2,27 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}^*	11,10 mm
Erwartungswert $E[d_{eq}^*]$, Variationskoeffizient c_V (Log-Normal)	11,09 mm; 0,1427
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,69; 0,26; 0,51

Tabelle 4.8: Mikrostrukturparameter eines künstlichen Schaummodells

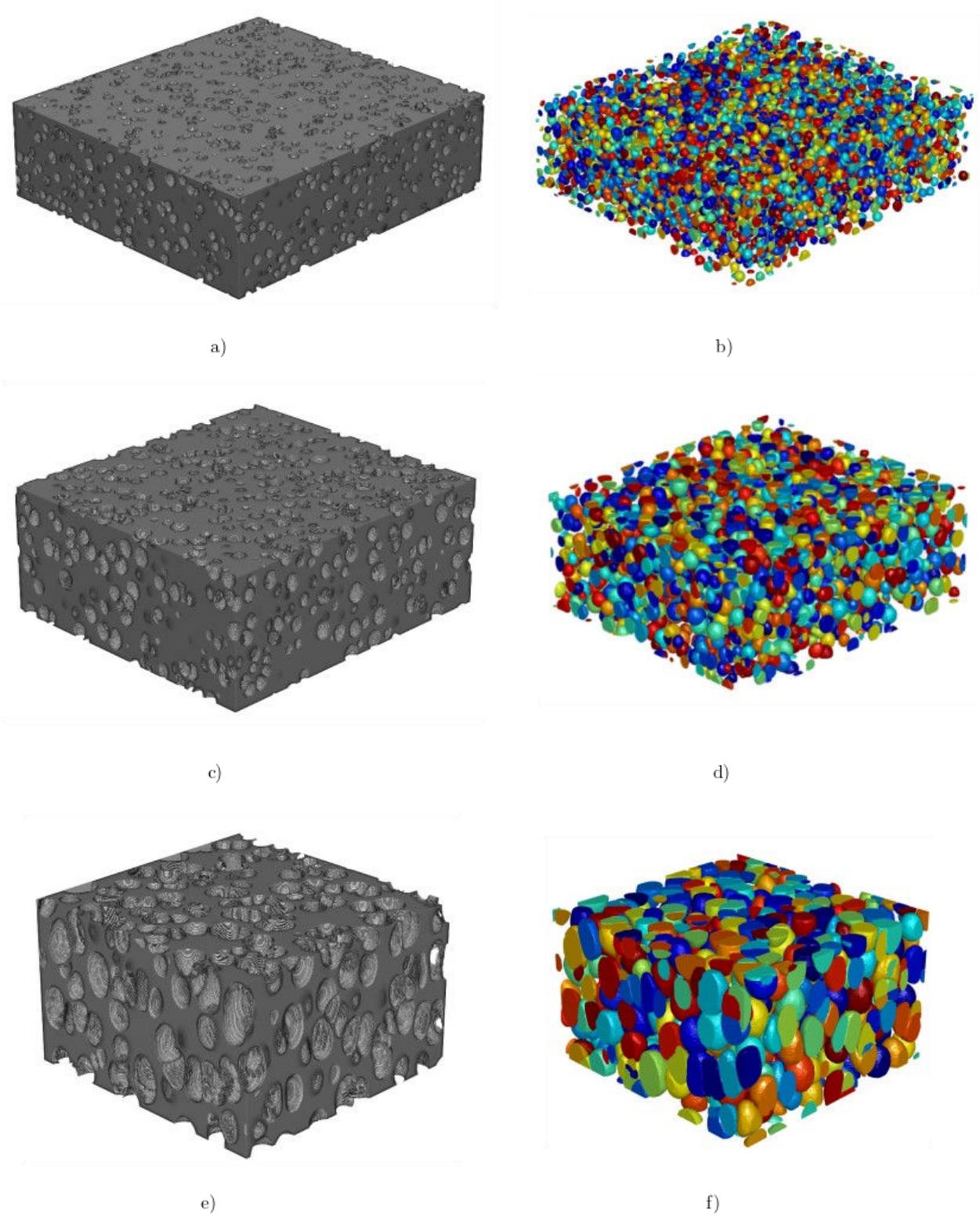


Abbildung 4.25: Ligamentsystem und Porenraum von Industrieschäumen: ESN-I a) und b); ESN-II c) und d); ESN-III e) und f)

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	107,8298 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	-120,1992 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	8,4624 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,8172, 0,1828
Strukturmodellindex f_{SMI}	-16,4598
Anzahl an inneren Poren N	4231
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	86,40 μm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	293,98 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}	119,57 μm
Erwartungswert $E[\bar{d}_{eq}]$, Variationskoeffizient c_V (Extremwert)	119,32 μm , 0,18
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,90; 0,73; 0,86

Tabelle 4.9: Mikrostrukturparameter des Industrieschaums ESN-I

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	112,3635 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	-130,2004 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	10,6502 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,7247; 0,2753
Strukturmodellindex f_{SMI}	-9,9829
Anzahl an inneren Poren N	1595
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	103,39 μm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	245,67 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}	146,73 μm
Erwartungswert $E[\bar{d}_{eq}]$, Variationskoeffizient c_V (Extremwert)	146,29 μm ; 0,22
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,91; 0,76; 0,89

Tabelle 4.10: Mikrostrukturparameter des Industrieschaums ESN-II

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	-2,2433 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	-82,6447 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	13,8236 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,4582; 0,5418
Strukturmodellindex f_{SMI}	-2,3778
Anzahl an inneren Poren N	382
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	156,78 μm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	162,01 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}	205,43 μm
Erwartungswert $E[\bar{d}_{eq}]$, Variationskoeffizient c_V (Extremwert)	205,37 μm ; 0,28
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,82; 0,65; 0,85

Tabelle 4.11: Mikrostrukturparameter des Industrieschaums ESN-III

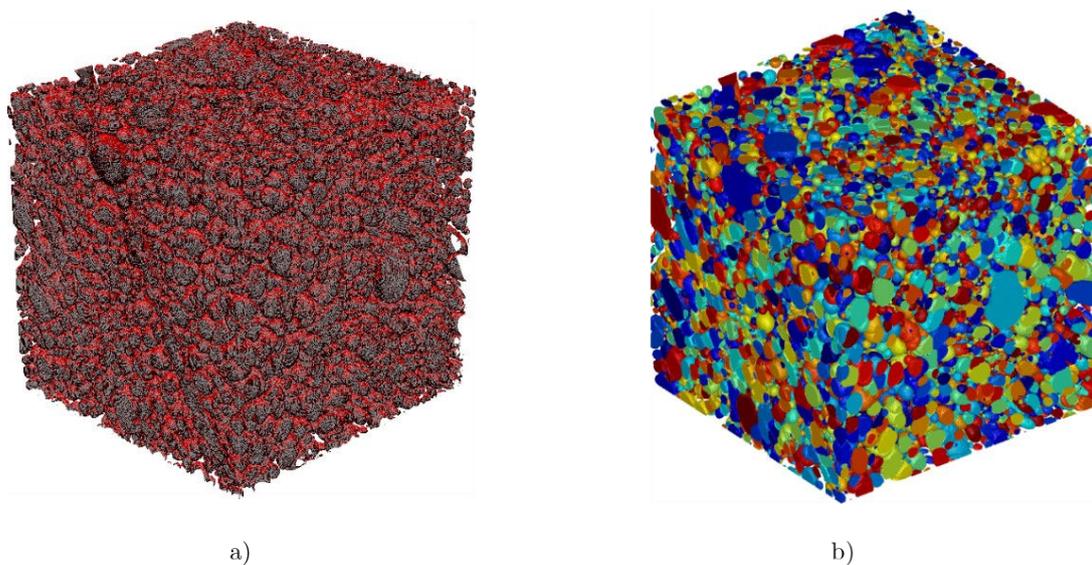


Abbildung 4.26: Ligamentsystem a) und Porenraum b) der DIK-Eigenherstellung

Mikrostrukturparameter	Werte
Dichte der Euler Charakteristik χ_V	208,3828 1/mm ³
Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V	-41,3390 1/mm ²
Oberflächendichte S_V	7,4487 1/mm
Volumendichte V_V und Porosität ϕ	0,5972; 0,4028
Strukturmodellindex f_{SMI}	-5,3391
Anzahl an inneren Poren N	22323
mittlere Sehnenlänge \bar{l}	216,33 μm
mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi	117,41 1/in
mittlerer Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq}	155,35 μm
Erwartungswert $E[d_{eq}^*]$, Variationskoeffizient c_V (Log-Normal)	163,91 μm ; 1,15
mittlere Formfaktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$	0,71; 0,35; 0,61

Tabelle 4.12: Mikrostrukturparameter der DIK-Eigenherstellung

Neben den industriellen Schäumen konnte auch eine Eigenherstellung des DIK in AP 2 mikrostrukturell anhand der intrinsischen Volumina charakterisiert werden. Das untersuchte quaderförmige Volumen besitzt eine Kantenlänge 7,86 mm. In Abbildung 4.26 ist das Matrixmaterial und der separierte Porenraum zu sehen. Die ermittelten Mikrostrukturparameter sind in der Tabelle aufgelistet. Auch hier weist die positive Euler-Charakteristik χ wieder auf einen geschlossenzelligen Schaum hin. Die negative Dichte des Integrals der mittleren Krümmung M_V und die Oberflächendichte S_V beschreiben wieder die Topologie der innenliegenden Flächen. Der Porenvolumenanteil ergibt sich über die Porosität ϕ zu 0,4. Der Strukturmodellindex f_{SMI} der Eigenherstellung liegt nun zwischen den Werten der zuvor betrachteten Proben ESN-II und ESN-III. Während die mittlere Sehnenlänge \bar{l} die gleiche Größenordnung wie die der industriellen Schäume aufweist, ist die Anzahl der Poren mit 22000 deutlich höher. Aufgrund des größeren Materialausschnittes ist die mittlere Porenanzahl pro Zoll ppi wieder von der gleichen Größe wie bei den Industrieschäumen. Der mittlere Durchmesser bei gleichem Kugelvolumen \bar{d}_{eq} weicht nun etwas mehr von dem Erwartungswerten $E[d_{eq}^*]$ ab, wobei nun wieder eine logarithmische Normalverteilung angenommen wurde. Der Bias kann mit dem höheren Variationskoeffizient c_V

von 1,15 erklärt werden. Die Rundheit der Poren ergibt sich durch die drei mittleren Formfaktoren \bar{f}_i und weicht deutlich von einer idealisierten Pore als Kugel ab.

Werden die Ergebnisse der Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der intrinsischen Volumina mit den Resultaten der kommerziellen Software VG Studio Max 3.4 in Abschnitt 4.4.1 verglichen, ergeben sich Abweichungen in den ermittelten Porositäten. Während für die Proben ESN-I und ESN-III die Porositäten mit dem Konzept der intrinsischen Volumina überschätzt werden, wird das Porenvolumen der Probe ESN-II unterschätzt. Bei der Auswertung mit der kommerziellen Software wird davon ausgegangen, dass die experimentelle Bestimmung der Porosität auf Grundlage des Massen-/Volumenverhältnisses exakt ist, welche als gegebene Eingangsgröße in den entwickelten Algorithmus einfließt. Durch die Hinzunahme der exakten Porosität gewinnt die Mikrostrukturcharakterisierung an Stabilität und ist weniger anfällig gegenüber verrauschten Bilddaten. Die prozentuale Abweichung der Porosität liegt bei den Proben ESN-II und ESN-III bei 7% und bei der Probe ESN-I bei 24%. Diese hohe Abweichung lässt sich durch das Versagen der Otsu Methode zur Bestimmung des Schwellenwertes zwischen weißen und schwarzen Pixeln erklären, daher wurde dieser Wert bei den Proben ESN-I und ESN-III manuell auf 0,5 gesetzt. Auch durch den Vergleich der mittleren Porengröße, vergleiche Tabelle ?? und Tabellen 4.8-4.10, ergeben sich Unterschiede. Diese ist für die Probe ESN-I etwas größer und für die Proben ESN-II und ESN-III kleiner, liegen jedoch in derselben Größenordnung. Neben unterschiedlichen verwendeten Schwellenwerten hängt die gemittelte Porengröße auch von der Gesamtanzahl der detektierten Poren ab, welche sich je nach Verfahren unterscheiden. Abschließend lässt sich sagen, dass sich beide Auswertungsverfahren zur Mikrostrukturcharakterisierung eignen, wobei die zusätzliche Verwendung der experimentell gemessenen Porosität die Bildsegmentierung zwischen Matrix und Poren verbessert.

4.4.3 Auswertung Auflichtmikroskopie

Im Gegensatz zur Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der Computertomographie (CT) wurde zudem ein Algorithmus zur Auswertung von Auflichtmikroskopaufnahmen entwickelt. Anders als bei der CT, bei der die Stapelung von einzelnen Grauwert-Schichtaufnahmen eine Überlagerung von Teilbereichen prozessbedingt vermeidet, ergeben sich bei aneinander gehefteten Auflichtmikroskopaufnahmen Überlappungsbereiche, welche redundante Informationen enthalten, siehe Abbildung 4.27. Zusätzlich sind auch unterschiedliche Mikroskopeinstellungen zu berücksichtigen, wie an den unterschiedlichen Farbprofilen zu erkennen, da diese zu Grauwertsprüngen im zusammengesetzten Bild führen. Ein korrektes Zusammenfügen von Einzelaufnahmen ist aufgrund einer hohen Bildauflösung zur Detektion einzelner Poren und die damit verbundene niedrige Anzahl an Poren pro Bild essenziell für eine repräsentative Auswertung eines Materialausschnittes. Das Auffinden der Überlappungsbereiche erfolgt hier über eine normierte Kreuzkorrelation benachbarter Bilder.

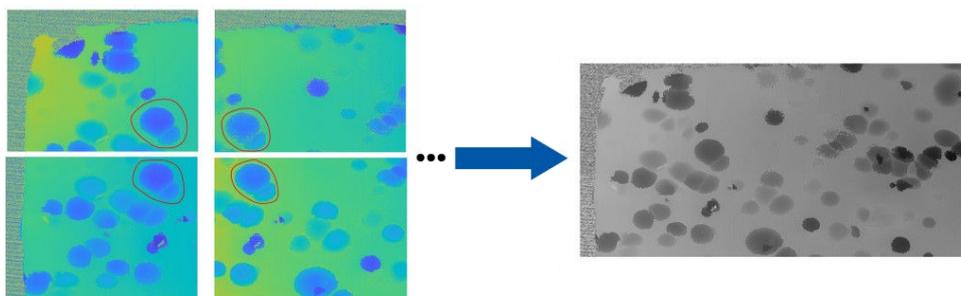


Abbildung 4.27: Zusammenfügen einzelner Auflichtmikroskopaufnahmen

Zur Bildaufnahme standen ein Digitalmikroskop und ein Farblasermikroskop der Firma *Keyence* zur Verfügung. Neben den typischen zweidimensionalen Kenndaten eines Bildes, liegen bei Farblasermikroskopaufnahmen zusätzlich Informationen über das Oberflächenprofil vor, also die relative Höhe jedes Bildpunktes. Dies hat den Vorteil das zusammen mit den zu detektierenden Schnittkreisdurchmessern unter Verwendung des Satzes von Pythagoras der Porendurchmesser und dessen Verteilung berechnet werden kann. Der zweidimensionale Schnittkreisdurchmesser ist immer kleiner gleich dem dreidimensionalen Porendurchmesser. Liegt kein Höhenprofil der Aufnahmen vor, kann alternativ über die sogenannte inverse Wicksell'sche Transformation die Porendurchmesserverteilung aus der Schnittkreisdurchmesserverteilung berechnet werden, wobei diese jedoch nur für geschlossenzellige und kugelförmige Poren eine exakte Lösung liefert [24] [25]. Eine Anpassung an parametrische und nicht-parametrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Porenradien schließt sich wie bereits bei der Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der CT an.

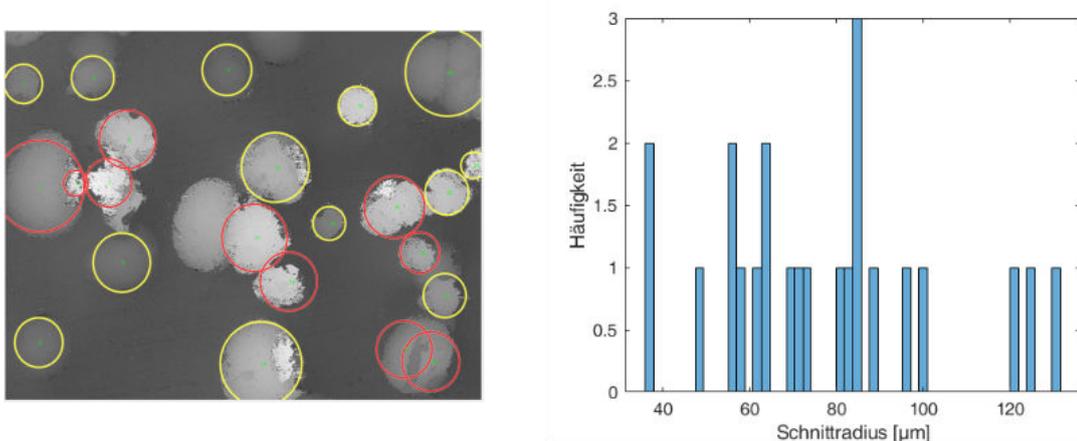


Abbildung 4.28: Detektion der geschnittenen Poren (links) und Histogramm der berechneten Schnittradien (rechts)

Zur Berechnung der jeweiligen Durchmesser ist auch hier wieder eine Segmentierung einzelner Poren durch eine Wasserscheidentransformation notwendig. Der generierte Algorithmus orientiert sich an einem Beispiel der Matlab-Dokumentation [26] und wurde halbautomatisiert programmiert, sodass der Nutzer aktiv Resultate des Programms anpassen kann. Dies ist notwendig, da je nach Geometrie und Position der Pore und gewählten internen Parametern des Algorithmus, einzelne Schnittkreise nicht erkannt werden, siehe z.B. in Abbildung 4.28 links. Während die gelb umkreisten Poren keinen Kontakt in der Schnittebene besitzen, berühren oder überlagern sich die rot dargestellten Poren. Zu erkennen ist, dass die genaue Detektion von Poren mit Kontakt fehleranfälliger ist, daher ist der hier verwendete Algorithmus für geschlossenzellige und nur begrenzt für gemischtzellige Schäume anwendbar. Offenporige Strukturen können jedoch nicht untersucht werden. In Abbildung 4.28 rechts sind jeweils die ermittelten Schnittkreisradien in einem Histogramm dargestellt. Unter Verwendung des Höhenprofils und trigonometrischen Beziehungen können sowohl die Kugelradien als auch die Porenzentren bestimmt werden und somit die in den Auflichtmikroskopaufnahmen geschnittenen Poren rekonstruiert werden, siehe Abbildung 4.29, wobei die rot markierten Kugeln sich wieder schneiden. Neben der bereits erwähnten Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Porenradien lassen zusätzlich Angaben über die Porenanzahl, die Anzahl an Poren ohne Kontakt und der mittlere Abstand zur nächsten Pore bestimmen. Da jedoch dieser zu Beginn des Projektes entstandene Algorithmus im Vergleich zum später verwendeten Konzept der intrinsischen

Volumina im Dreidimensionalen, eine nicht zu vernachlässigende Fehleranfälligkeit besitzt, auch bei einer zeitaufwendigen Nachbearbeitung der Resultate, wurde im fortlaufenden Projekt der Algorithmus zur Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der Auflichtmikroskopie nicht weiter angewandt. Die erfolgte Einarbeitung und die damit verbundenen Erkenntnisse im Bereich der Bildverarbeitung konnten jedoch für das Verständnis und Durchführung der Mikrostrukturcharakterisierung auf Basis der CT genutzt werden. Eine Überarbeitung des Auswertungsalgorithmus steht für die Verwendung von zukünftigen Projekten noch aus.

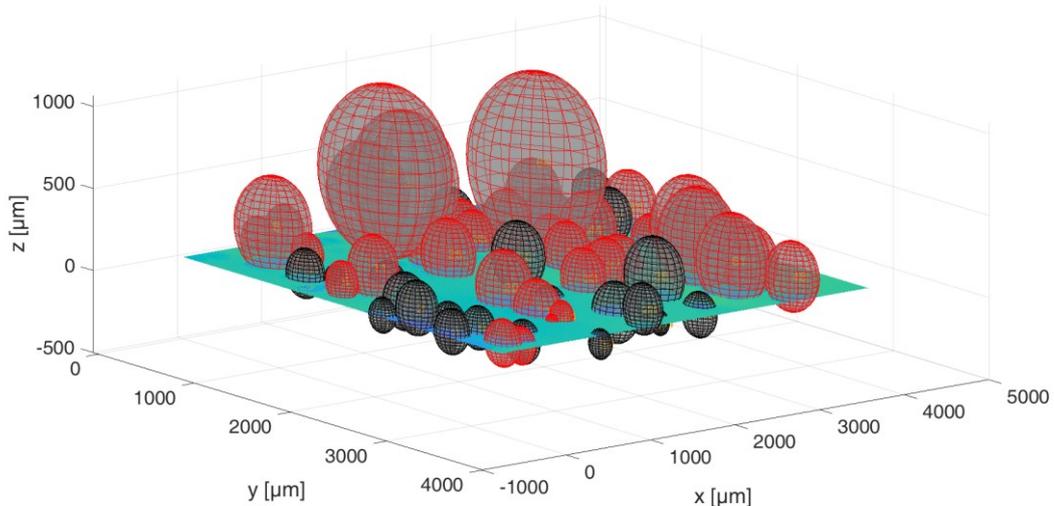


Abbildung 4.29: Darstellung der rekonstruierten Poren, welche durch die Bildebene geschnitten werden

4.5 AP 6: Kontinuumsmechanische Modellierung (DIK)

4.5.1 Modellierung der Mikrostruktur des Schaums

In der Kontinuumsmechanik wird angenommen, dass der beschriebene Körper kontinuierlich ist und keine Inhomogenitäten im Material auftreten. Da diese Annahme bei Schäumen, die auf mikroskopischer Ebene entweder aus Porengas oder Matrixmaterial bestehen, nicht erfüllt sein kann, wird der Werkstoff auf einer übergeordneten Größenskala betrachtet, für welche die Eigenschaften der Mikrostruktur eines repräsentativen Ausschnitts in gemittelter Form vorliegen. Die Auswahl dieses Ausschnitts – des sogenannten repräsentativen Volumenelements (RVE) bzw. der sogenannten mesoskopischen Größenskala – ist hierbei eine Kernaufgabe in der Multiskalenmodellierung. Die Repräsentativität eines RVE kann dabei immer durch die Wahl eines ausreichend großen Ausschnitts gewährleistet werden; jedoch geht ein größerer Ausschnitt bei den meisten Modellierungsansätzen mit einer größeren Anzahl von Einschlüssen und somit auch einem größeren numerischen Aufwand einher. Da der Rechenaufwand bei Simulationen mit Multiskalenmodellen oft so groß ist, dass diese mit den Rechnersystemen der meisten KMU nicht in der industriellen Praxis genutzt werden können, wurde im Rahmen des Projekts ein besonders effizienter Ansatz gewählt.

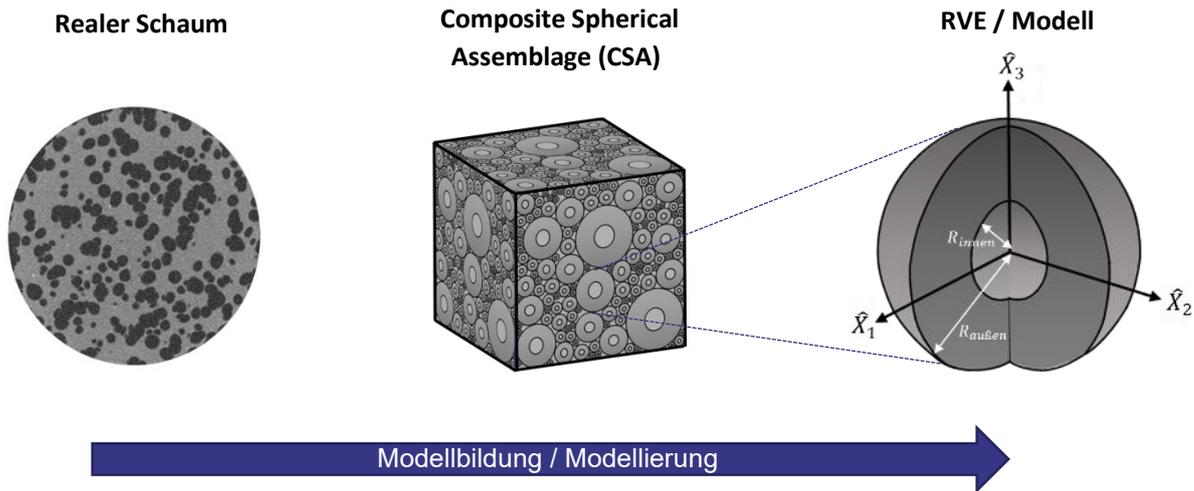


Abbildung 4.30: Modellierung der Mikrostruktur mit einer Composite Spherical Assemblage

Hierfür wird die Mikrostruktur des Schaums in einem ersten Schritt zunächst vereinfachend als sogenannte „Composite Spherical Assemblage“ (CSA) modelliert. Wie in Abbildung 4.30 illustriert, entspricht diese einer raumfüllenden Ansammlung von Hohlkugeln unterschiedlicher Größe, bei der das Verhältnis von Innen- zu Außenradius bei allen Hohlkugeln identisch ist. In einem zweiten Schritt wird angenommen, dass die Belastungsgeschwindigkeiten im quasistatischen Bereich liegen. Aufgrund der Skaleninvarianz des mechanischen Problems für den Fall von vernachlässigbar kleinen Trägheitskräften, kann das Verhalten der gesamten CSA nun vereinfachend mittels einer einzelnen Hohlkugel als repräsentatives Volumenelement beschrieben werden. Der Begriff „RVE“ ist hier aufgrund der nicht-periodischen Mikrostruktur je nach Definition in der Literatur jedoch teilweise nicht mehr anwendbar. Da die wesentlichen Arbeiten in diesem Bereich die Hohlkugel als RVE bezeichnen, soll dieser Begriff im Rahmen des vorliegenden Berichts beibehalten werden.

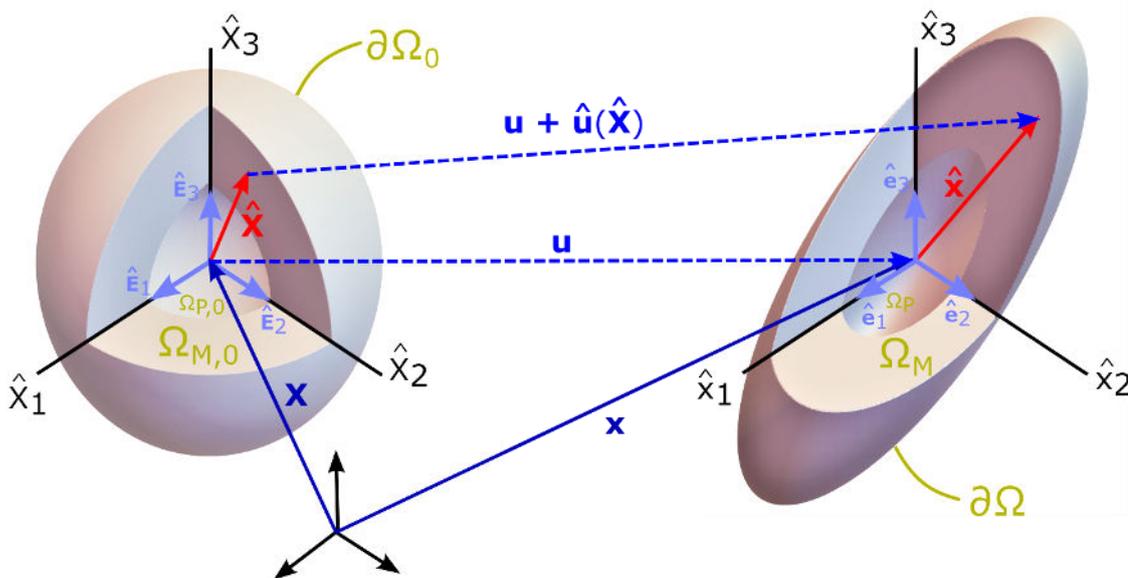


Abbildung 4.31: RVE im undeformierten Zustand (li.) und im deformierten Zustand (re.)

Neben den bisher schon vorgestellten makroskopischen Größen wie der makroskopischen Position $x(X)$ im deformierten Zustand, liegen analog hierzu nun auch mikroskopische Größen wie die mikroskopische Position $\hat{x}(\hat{X})$ eines Materialpunkts innerhalb des RVE's vor. Existiert eine Größe sowohl auf der Mikro- als auch auf der Makroebene, wird die Mikrogröße mit $\hat{\bullet}$ gekennzeichnet. Falls die Größe jedoch nur auf der Mikroebene existiert, wird auf eine Kennzeichnung verzichtet. Ein Überblick zur Definition der wesentlichsten Größen ist zudem Abbildung 4.31 zu entnehmen. Das RVE-Gebiet Ω_0 im undeformierten Zustand entspricht der Vereinigung aus dem Gebiet der Matrix $\Omega_{M,0}$ und dem Gebiet der Pore $\Omega_{P,0}$ und wird vom Rand $\partial\Omega_0$ begrenzt. Analog hierzu wird im deformierten Zustand das RVE-Gebiet mit $\Omega = \Omega_P \cup \Omega_M$ und dem Gebietsrand $\partial\Omega$ gekennzeichnet.

4.5.2 Materialmodell für die Elastomermatrix

Da sich die Eigenschaften der Elastomermatrix auf das makroskopische Verhalten des Schaums übertragen, wird bereits mit der Wahl des Konstitutivgesetzes der Matrix festgelegt, welche inelastischen Effekte berücksichtigt werden und welche nicht. Im Rahmen des Projekts wurde eine Verzerrungsenergiedichtefunktion der Form

$$\rho_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{F}}) = (1 - \phi^{VE}) \underbrace{\hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{SIRM}(\hat{\mathbf{F}}, X_{max})}_{\substack{\text{Hyperelastizität} \\ + \text{Softening}}} + \phi^{VE} \sum_{j=1}^m \underbrace{\hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}(\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)})}_{\text{Viskoelastizität}} \quad 4.7$$

genutzt, welche sich additiv aus einem Beitrag eines hyperelastischen Teilmodells und einem Beitrag eines viskoelastischen Teilmodells zusammensetzt, die mit einem Skalierungsfaktor ϕ^{VE} gewichtet werden. Im hyperelastischen Anteil ist zudem die Materialerweichung über die interne Variable X_{max} berücksichtigt.

4.5.2.1 Hyperelastisches Teilmodell mit Materialerweichung

Das Teilmodell für den hyperelastischen Beitrag und die Materialerweichung entstammen dem sogenannten „*Stress Induced Restructuration Model*“ (SIRM) [27]. Bei diesem Modell wird angenommen, dass sowohl das Polymernetzwerk an sich, als auch die enthaltenen Füllercluster zur Verzerrungsenergiedichte

$$\rho_0 \hat{\psi}_{ENAR}(X_C, \hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}})) = \underbrace{\frac{G_c}{2} \left(\frac{(X_C(\hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}) - 3))}{1 - \frac{(X_C(\hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}) - 3))}{n}} \right)}_{\text{Beitrag des Polymernetzwerks}} + \underbrace{\frac{G_f}{2} (X_C^2(\hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}) - 3))}_{\text{Beitrag der Füllercluster}} \quad 4.8$$

beitragen, wobei der Anteil des Polymernetzwerks auf einer modifizierten Version des erweiterten nicht-affinen Röhrenmodells basiert. Sowohl der Einfluss der durch Nachbarketten behinderten Bewegungsmöglichkeiten als auch die endliche Streckbarkeit der Polymerketten sind somit in einem vollständig physikalisch motivierten Modell inkludiert. Der Beitrag der Füllercluster wird zum einem direkt über einen zusätzlichen Term im Potential berücksichtigt, zum anderen indirekt durch Einführung des Verstärkungsfaktors X_C , welcher als Vorfaktor der Invarianten im Potential genutzt wird. Hiermit wird das Phänomen der hydrodynamischen Amplifikation – also der Verstärkung des Polymernetzwerks durch die enthaltenen Füllercluster modelliert. Da der Grad der Verstärkung der einzelnen Füllercluster innerhalb des Materials sehr inhomogen ist, wird die

Häufigkeit einer Verstärkung X_C mit der Verteilung $P(X_C)$ beschrieben. Gewichtetes Mittel der Verzerrungsenergiedichte $\rho_0 \hat{\psi}_{ENAR}(X_C, \hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}))$ führt schließlich auf das Potential

$$\begin{aligned} \rho_0 \hat{\psi}_{SIRM}(\hat{\mathbf{F}}, X_{max}) &= \int_1^{X_{max}} P(X_C) (\rho_0 \hat{\psi}_{ENAR}(X_C, \hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}))) dX_C & 4.9 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\chi - 1}{1 - X_{max}^{1-\chi}} \left[\frac{G_c \hat{I}_1}{\chi - 2} (1 - X_{max}^{2-\chi}) + \right. \\ &\quad \left. G_c n^{2-\chi} \hat{I}_1^{\chi-1} \ln \left(\frac{\hat{I}_1 - n}{\underbrace{\hat{I}_1 X_{max} - n}_{f_{sing}(\hat{I}_1)}} \right) + \frac{G_f \hat{I}_1}{\chi - 3} (1 - X_{max}^{3-\chi}) \right] \end{aligned}$$

mit $\hat{I}_1 = \hat{I}_1 - 3$

$$P(X_C) = X^{-\chi} \frac{\chi - 1}{1 - X_{max}^{1-\chi}}$$

Es ergibt sich somit eine zusätzliche Abhängigkeit der Verzerrungsenergiedichte von der Zustandsvariablen X_{max} , welche den größten Verstärkungsfaktor innerhalb der Verteilung $P(X_C)$ kennzeichnet. Da die Füllercluster während einer Deformation zerfallen (Mullins Effekt), sollte sich auch der Grad der Verstärkung durch die Füllercluster lastabhängig ändern können. Dieser Effekt wird durch eine zeit- und lastabhängige Evolution der oberen Grenze der Verteilung $P(X_C)$ mit der Evolutionsgleichung

$$\dot{X}_{max} = \begin{cases} 0 & \text{falls } X_{max} = 1 + 10^{-5} \\ e^{-e_b} - \exp \left(v_b G_c \underbrace{\frac{\hat{I}_1 X_{max}}{2 - \frac{2\hat{I}_1 X_{max}}{n}}}_{g_{sing}} + \frac{\hat{I}_1 X_{max}^2 G_f}{2} - e_b \right) & \text{falls } X_{max} > 1 + 10^{-5} \end{cases} \quad 4.10$$

abgebildet. Der Zerfall der Füllercluster wird hierbei mittels der monoton fallenden Funktion $X_{max}(t, \hat{I}_1(t))$ als irreversibel modelliert. Eine schematische Darstellung der Verstärkungsfaktorverteilung bei einer steigenden ersten Invariante im zeitlichen Verlauf ist in Abbildung 4.32 illustriert.

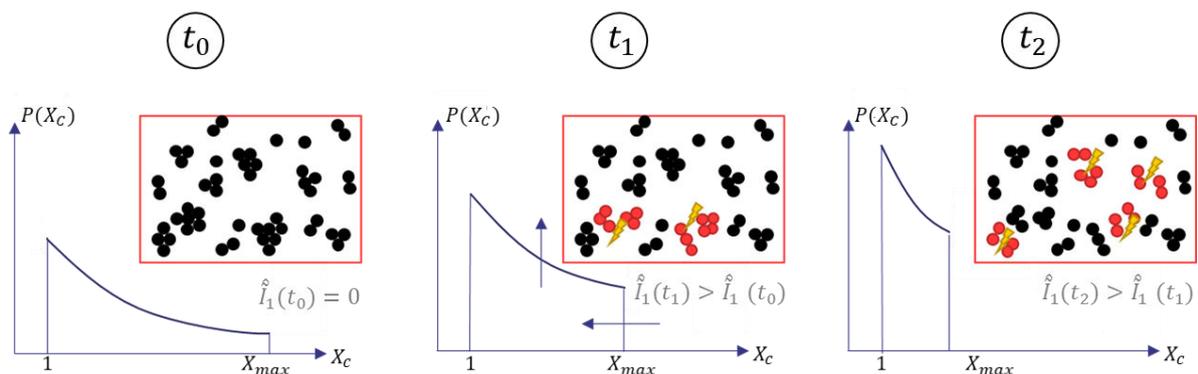


Abbildung 4.32: Schematische Darstellung der Evolution von $P(X_C)$

Sowohl die Evolutionsgleichung 4.10 als auch die Verzerrungsenergiedichte 4.9 weisen eine Singularität an der Stelle $\hat{I}_1 X_{max} = n$ auf:

$$\lim_{(\hat{I}_1 X_{max}) \rightarrow n} \rho_0 \hat{\psi}_{SIRM} = +\infty \quad 4.11$$

$$\lim_{(\hat{I}_1 X_{max}) \rightarrow n} \dot{X}_{max} = -\infty . \quad 4.12$$

Die Evolutionsgleichung ist hierbei so konstruiert, dass die Polstelle grundsätzlich nicht überschritten werden kann. Ebenso können Deformationszustände, bei denen die Polstelle in der Verzerrungsenergiedichte überschritten ist, im Idealfall nicht vorkommen, da die Verzerrungsenergiedichte und somit auch die Materialsteifigkeit nach Gleichung 4.11 gegen unendlich strebt und somit Deformationszustände $\hat{I}_1 \geq X_{max}/n$ nicht eingenommen werden können. Bei der Nutzung von numerischen Lösungsverfahren wie der impliziten FEM zur Lösung des makroskopischen Rand-Anfangswertproblems oder dem impliziten Euler-Verfahren zur Integration der Evolutionsgleichung, kann es bei der Lösung des resultierenden Differentialgleichungssystems jedoch auch zu einer Überschreitung der Polstelle kommen, wodurch unphysikalisches Materialverhalten und Nicht-Konvergenz verursacht werden können.

Diese unphysikalischen Zustände treten dabei insbesondere an der Innenfläche der Hohlkugel bei makroskopisch großen volumetrischen Deformationen und einem niedrigen Verhältnis von Innen- zu Außenradius auf. Damit ein Zustand einer negativen Verzerrungsenergiedichte und eines reversiblen Mullins Effekts

$$\rho_0 \hat{\psi}_{SIRM} < 0 \quad \text{falls } \hat{I}_1 X_{max} > n \quad 4.13$$

$$\dot{X}_{max} > 0 \quad \text{falls } \hat{I}_1 X_{max} > n \quad 4.14$$

nicht vorkommen können, sollte einer der folgenden beiden Maßnahmen ergriffen werden:

Lösungsstrategie I

Einige FE-Softwarepakete bieten die Möglichkeit, den Zeitschritt (und somit auch das Lastinkrement innerhalb des Zeitschritts) von der Subroutine steuern zu lassen. Dies wurde bei der Implementierung des Materialmodells über die Variable `ibort` des Moduls `common_blocks` in der `hypela2`-Schnittstelle von MSC Marc berücksichtigt. Falls im aktuellen Inkrement die Bedingung $\hat{I}_1 X_{max} \geq n$ erfüllt ist, dann wird der Zeitschritt (bzw. das Lastinkrement) schrittweise verkleinert, bis die Bedingung nicht mehr erfüllt ist.

Lösungsstrategie II

Die Terme $f_{sing}(\hat{I}_1)$ in der Verzerrungsenergiedichte und $g_{sing}(\hat{I}_1)$ in der Evolutionsgleichung, welche die Polstellen verursachen, können durch eine Reihenentwicklung in der Form

$$\frac{\hat{I}_1 - n}{\hat{I}_1 X_{max} - n} \approx 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\hat{I}_1^i}{(n)^i} X_{max}^{i-1} (X_{max} - 1)}_{f_{sing,approx}(\hat{I}_1, k)} \quad \text{für } 0 \leq \hat{I}_1 \leq \frac{n}{X_{max}} \quad 4.15$$

$$\frac{\hat{I}_1 X_{max}}{2 - \frac{2\hat{I}_1 X_{max}}{n}} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(X_{max} \hat{I}_1)^i}{(n)^{i-1}} \quad \text{für } 0 \leq \hat{I}_1 \leq \frac{n}{X_{max}} \quad 4.16$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g_{sing}(\hat{I}_1)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{g_{sing,approx}(\hat{I}_1, k)}$$

ersetzt werden. Mit steigender Anzahl von Reihengliedern k konvergieren die Reihenentwicklungen gegen die Funktionen g_{sing} und f_{sing} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{sing,approx} = f_{sing} \quad \text{für } 0 \leq \hat{I}_1 \leq \frac{n}{X_{max}} \quad 4.17$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{sing,approx} = g_{sing} \quad \text{für } 0 \leq \hat{I}_1 \leq \frac{n}{X_{max}} \quad 4.18$$

Die Reihen weisen jedoch, wie auch in Abbildung 4.33 ersichtlich, keine Polstellen und somit keinen Vorzeichenwechsel an der Stelle $\hat{I}_1 = n/X_{max}$ auf.

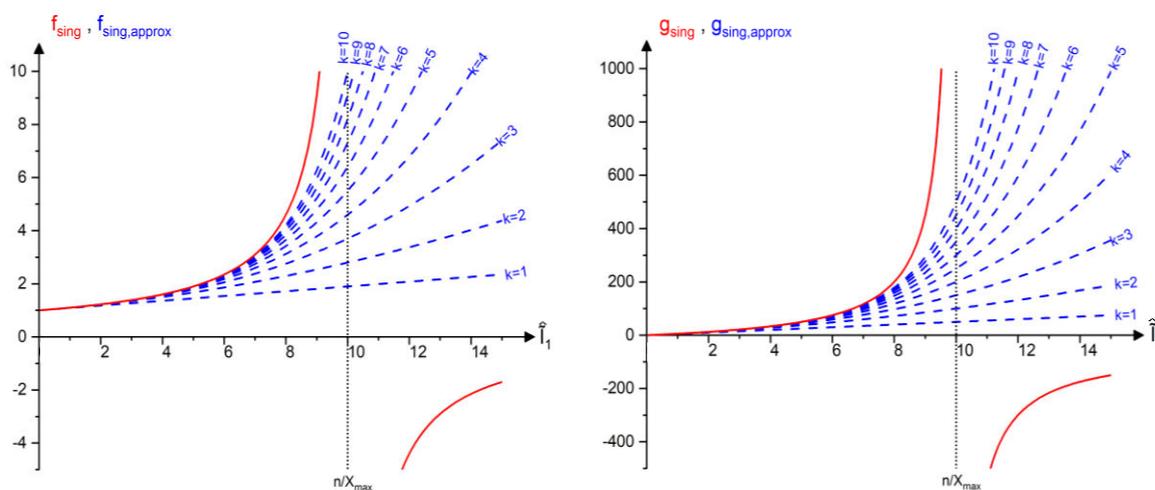


Abbildung 4.33: $f_{sing}(\hat{I}_1)$, $g_{sing}(\hat{I}_1)$ und Reihenentwicklungen für $n = 100, X_{max} = 10$

4.5.2.2 Teilmodell für die Viskoelastizität

Das viskoelastische Verhalten des Matrixmaterials wurde im Rahmen des Projekts auf Basis einer multiplikativen Zerlegung des lokalen Deformationsgradienten

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)} \quad 4.19$$

mit einem inelastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)}$ und einen elastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)}$ nach [28] modelliert. Wie in Abbildung 4.34 ersichtlich, kann das Gesamtmodell mit der viskoelastischen Erweiterung als modifiziertes Zener-Modell, bei der eine um Materialerweichung erweiterte nichtlineare Feder parallel zu m Maxwell-Elementen geschaltet ist, interpretiert werden.

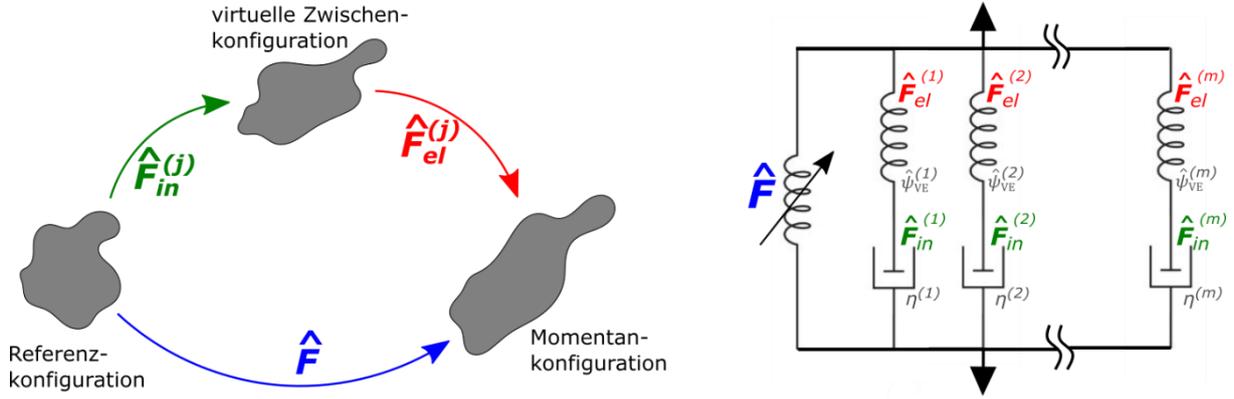


Abbildung 4.34: Darstellung des Modells als Feder-Dämpfer-System

Die Federn der Maxwell-Elemente sind hierbei ebenfalls nichtlinear, wobei das Federverhalten auf Basis eines beliebigen hyperelastischen Materialmodells mit der Verzerrungsenergiedichte $\hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}$ definiert werden kann. Die grundlegende Motivation bei der Nutzung einer Modellierung mit einem multiplikativen Split des Deformationsgradienten besteht in der Nachweisbarkeit der thermodynamischen Konsistenz. Dies bedeutet, dass die Konstitutivgleichungen so formuliert sind, dass die Clausius-Duhem-Ungleichung – die in der Kontinuumsmechanik geläufige Form des zweiten Satzes der Thermodynamik – stets erfüllt ist. Für das vorliegende Materialmodell ergibt sich die Clausius-Duhem-Ungleichung wie folgt:

$$\left(\hat{\sigma} + \hat{p} \mathbf{I} - 2(1 - \phi^{VE}) \hat{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{SIRM}}{\partial \hat{\mathbf{B}}} - 2\phi^{VE} \sum_{j=1}^m \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} \right) : \hat{\mathbf{D}} + \sum_{j=1}^m 2 \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} : \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T - \frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{SIRM}}{\partial X_{max}} \frac{\partial X_{max}}{\partial t} \geq 0 \quad 4.20$$

$$\text{mit } \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)} = \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{D}} = (\hat{\mathbf{F}}^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)} \cdot (\hat{\mathbf{F}}^{(j)})^{-1}.$$

Da der erste Term mit der Definition der Spannung $\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{B}} \cdot (\partial(\rho_0 \hat{\psi}_{SIRM})/\partial \hat{\mathbf{B}})$ a priori erfüllt ist, verbleibt lediglich die Dissipationsungleichung:

$$\hat{\mathbf{D}} = \underbrace{\sum_{j=1}^m 2 \frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} : \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T}_{\hat{\mathcal{D}}_{visc}} + \underbrace{\left(-\frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{SIRM}}{\partial X_{max}} \frac{\partial X_{max}}{\partial t} \right)}_{\hat{\mathcal{D}}_{soft}} \geq 0. \quad 4.21$$

Für eine thermodynamisch konsistente Modellierung muss die Dissipationsrate $\hat{\mathbf{D}}$ demnach positiv sein, wobei diese sich hier additiv aus einem vom viskoelastischem Teilmodell stammenden Anteil \mathcal{D}_{visc} und einem von der Materialerweichung induzierten Anteil \mathcal{D}_{soft} zusammensetzt. Der Anteil der Materialerweichung \mathcal{D}_{soft} kann hierbei, wie in [27] nachgewiesen, nicht negativ werden. Für den Nachweis der thermodynamischen Konsistenz des Gesamtmodells muss nun also nur noch die Ungleichung

$$\overbrace{\sum_{j=1}^m 2 \frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} : \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T}_{\hat{\mathcal{D}}_{visc}} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \underbrace{2 (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T \cdot \frac{\partial \rho_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)}}_{\mathbf{q}_1^{(j)}} : \underbrace{\hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)}}_{\mathbf{q}_2^{(j)}} \geq 0 \quad 4.22$$

erfüllt sein. Durch Umformen lässt sich $\hat{\mathcal{D}}_{visc}$ als Summe von Doppelpunktprodukten $\mathbf{q}_1^{(j)} : \mathbf{q}_2^{(j)}$ schreiben, wobei $\mathbf{q}_2^{(j)}$ der noch unbekanntes und zu definierenden inelastischen Deformationsrate (Lie-Ableitung des inelastischen Anteils des Green-Lagrange-Verzerrungstensors) entspricht. Damit die Dissipationsungleichung stets erfüllt ist, muss diese Rate (bzw. $\mathbf{q}_2^{(j)}$) so definiert werden, dass das Frobenius-Skalarprodukt $\mathbf{q}_1^{(j)} : \mathbf{q}_2^{(j)}$ stets größer oder gleich null ist. Dies ist beispielsweise der Fall, falls

$$\mathbf{q}_2^{(j)} = \alpha_s^{(j)} \mathbf{q}_1^{(j)} \quad \text{und} \quad \alpha_s^{(j)} \geq 0 \quad 4.23$$

gilt. Hierbei kann der Faktor $\alpha_s^{(j)}$ nach [29] als reziproke Viskosität $1/\eta^{(j)}$ interpretiert werden, welche zusammen mit dem hyperelastischen Materialmodell $\hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}$ das Verhalten des jeweiligen Maxwell-Elements bestimmt. Die Lie-Rate des Green-Lagrangischen Verzerrungstensors folgt hiermit zu

$$\underbrace{\hat{\mathbf{E}}_{in}^{(j)}}_{\mathbf{q}_2^{(j)}} = \underbrace{\frac{1}{\eta^{(j)}}}_{\alpha_s^{(j)}} \underbrace{2 (\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)})^T \cdot \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)}}_{\mathbf{q}_1^{(j)}} \quad 4.24$$

Nach einigen weiteren Umformungen ergibt sich die Evolutionsgleichung des inelastischen Anteils des rechten Cauchy-Tensors $\hat{\mathcal{C}}_{in}^{(j)} = (\hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)})^T \cdot \hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)}$ mit

$$\dot{\hat{\mathcal{C}}}_{in}^{(j)} = \frac{1}{\eta^{(j)}} 4 (\hat{\mathbf{F}})^T \cdot \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}}{\partial \hat{\mathbf{B}}_{el}^{(j)}} \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad 4.25$$

Der Verzerrungsenergiedichte

$$\hat{\rho}_0 \hat{\psi}_{VE}^{(j)}(\hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{F}}_{in,j}) = \frac{\mu^{(j)}}{2} \hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_{in}^{(j)})^{-1}) = \frac{\mu^{(j)}}{2} \hat{I}_1(\hat{\mathbf{F}}_{el}^{(j)}) \quad 4.26$$

wird beim vorliegenden Modell ein Neo-Hooke Potential zugeordnet. Grundsätzlich wäre hier aber auch eine Verwendung von beliebigen anderen hyperelastischen Materialmodellen denkbar. Die Evolutionsgleichung 4.25 wird mit der Iterationsvorschrift

$$\hat{\mathcal{C}}_{in,(t+1)}^{(j)} = \frac{\mu^{(j)}}{\eta^{(j)}} \text{dev} \left(\frac{1}{\text{tr}(\hat{\mathcal{C}}_{(t)})^{1/3}} \hat{\mathcal{C}}_{(t)} \cdot (\hat{\mathcal{C}}_{in,(t)}^{(j)})^{-1} \right) \cdot \hat{\mathcal{C}}_{in,(t)}^{(j)} \quad 4.27$$

gelöst, welche aus einem in [30] vorgestellten Lösungsverfahren folgt. Diese Zeitintegrationsschema basiert zwar auf dem impliziten Euler-Verfahren, wurde aber so modifiziert, dass die Lösung in geschlossener Form vorliegt und somit kein iterativer Gleichungslöser benötigt wird. Neben dem hier vorgestellten Teilmodell für die Viskoelastizität, die hier nun auch als „Variante B“ bezeichnet wird, wurden ebenfalls zwei weitere Varianten implementiert und miteinander verglichen. „Variante C“ entspricht „Variante B“ mit der Modifikation, dass das Softening ebenfalls auf die Federn der Maxwell-Elemente angewandt worden ist. Des Weiteren wurde eine „Variante A“ untersucht, deren Modellierung der des „Stress Induced Restructuration Model“ [27] entspricht, bei der ein einziges modifiziertes Maxwell-

Element mit einer lastabhängigen Relaxationszeit genutzt wird. Eine Skizze der Modelle in der Form eines Feder-Dämpfer-Systems ist in Abbildung 4.35 gegeben.

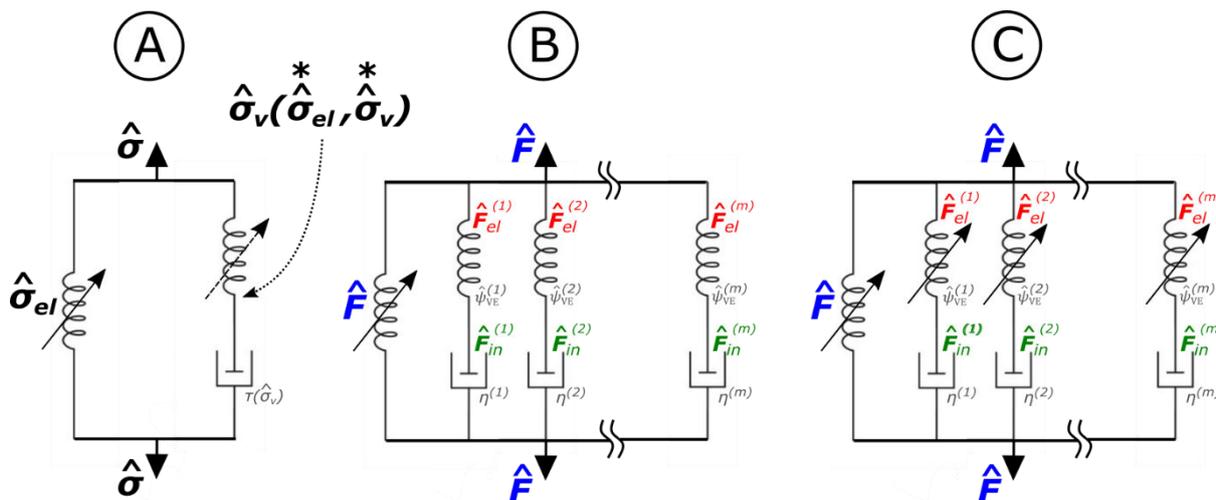


Abbildung 4.35: Modellvariante (A), (B) und (C) als Feder-Dämpfer-System

Um die Fähigkeit zur Beschreibung des Materialverhaltens der im Projekt untersuchten Matrixmaterialien zu vergleichen, wurden die Modellvarianten A, B und C an die experimentell aufgenommenen Spannungs-Dehnungskurven der fünf untersuchten Vollmaterialien gefittet. Bei den Parameteranpassungen wurde die mittlere quadratische Abweichung (der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung) zwischen Modell und Experiment bestimmt, welche in Tabelle 4.13 für alle untersuchten Materialien und Modellvarianten aufgeführt ist. Es ist ersichtlich, dass die Anpassungsgüte bei den Materialvariationen „DIK-1“ und „DIK-2“ mit einem Rußgehalt von 75 phr wesentlich unbefriedigender ist, als bei den Materialvariationen „DIK-3“ und „DIK-4“ mit einem Rußgehalt von 25 phr. Die Abweichung war beim stark gefüllten Naturkautschuk (Material 1) bei allen Modellvarianten so unzureichend, dass dieser für eine weitergehende Validierung des Elastomerschaum-Materialmodells ausgeschlossen wurde. Bei den verbleibenden Materialien zeigt Variante A die beste und Variante C die schlechteste Anpassungsgüte.

Materialbezeichnung		DIK-1	DIK-2	DIK-3	DIK-4	"ESN"
Polymertyp		NR	EPDM	NR	EPDM	-
Rußgehalt (N550)		75 phr	75 phr	25 phr	25 phr	-
RMS ERROR	SIRM (A)	0,4788	0,1831	0,0540	0,0282	0,0722
	Mod. SIRM (B)	0,4065	0,2051	0,0564	0,0314	0,0794
	Mod. SIRM (C)	0,5389	0,2158	0,0565	0,0363	0,0797

Tabelle 4.13: Mittlerer quadratischer Fehler (1.PK-Spannung) für die 3 Modellvarianten (A), (B) und (C)

Da das Materialverhalten der Elastomermatrix bei der vorgesehenen Modellierung mit der Hohlkugel als repräsentatives Volumenelement nur mit einem vollständig auf einer Verzerrungsenergiegedichte basierendem Modell beschrieben werden kann, wurde schließlich „Variante B“ und nicht „Variante A“ gewählt.

4.5.3 Danielssons Ansatz

Zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von Elastomerschäumen wurde erstmals von Danielsson eine Hohlkugel als repräsentatives Volumenelement (für beliebige Belastungszustände) genutzt. Danielsson nimmt hierbei vereinfachend an, dass sich das Matrixmaterial ideal-inkompressibel verhält. Darüber hinaus wird auf eine Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung in der Elastomermatrix verzichtet. Der Ansatz basiert somit nicht auf einem rechenaufwändigen, iterativen Prozess, bei dem ein lokaler Deformationszustand bestimmt wird, der sowohl die Gleichgewichtsbedingung, als auch die Kinematik und das Materialgesetz erfüllt. Wie bereits in Kapitel 4.2.2 dargestellt, konvergiert die FE-Lösung, bei welcher die Gleichgewichtsbedingung in schwacher Form erfüllt ist, für den Fall der reinen Scherung und reiner volumetrischer Deformation mit zunehmender Inkompressibilität gegen die des Danielsson-Ansatzes.

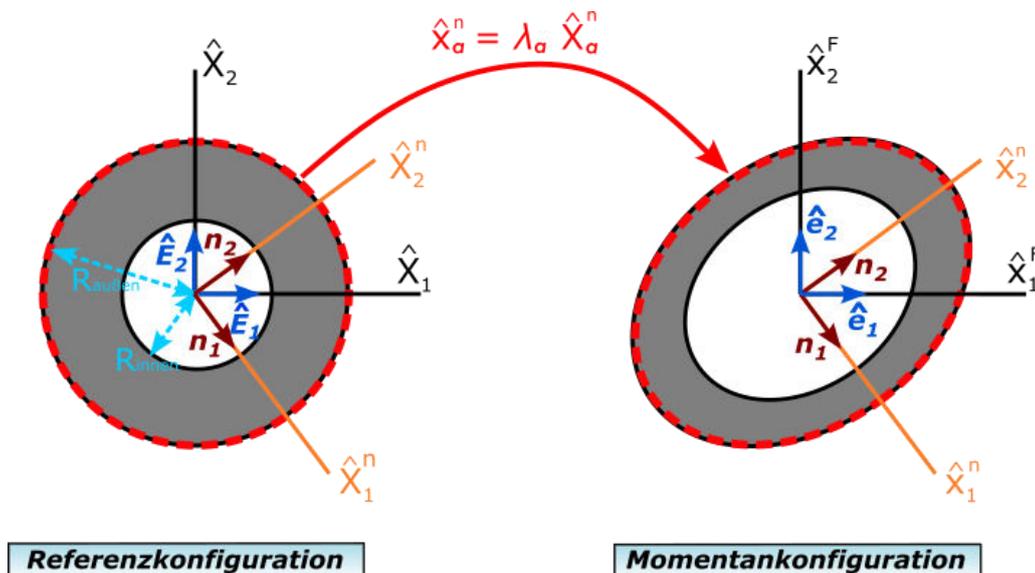


Abbildung 4.36: Schematische Darstellung der Hohlkugel in Referenz- und Momentankonfiguration

Danielsson nimmt in [2] an, dass sich das lokale Verschiebungsfeld in der Hohlkugel über eine Funktion der Form

$$\hat{x}_a^n = h_a(R) \hat{X}_a^n \quad \text{mit} \quad R = \sqrt{\hat{X}^n \hat{X}^n} \quad 4.28$$

beschreiben lässt, wobei die Basis von \hat{x}_a^n und \hat{X}_a^n den Eigenvektoren n_i des makroskopischen rechten Streckungstensors V entspricht. Eine entsprechende Übersicht zu den verwendeten Koordinatensystemen ist zudem in Abbildung 4.36 gegeben. Durch Ableiten der aktuellen Position \hat{x}_j^n nach der Position \hat{X}_j^n in Referenzkonfiguration ergibt sich der mikroskopische Deformationsgradient

$$\hat{F}_{ab}^n = \frac{\partial \hat{x}_a^n}{\partial \hat{X}_b^n} = \frac{\partial h_a}{\partial R} \frac{\hat{X}_a \hat{X}_b}{R} + h_a \delta_{ab} \quad 4.29$$

Ideale Inkompressibilität ($\det(\hat{F}^n) \stackrel{!}{=} 1$) wird nicht nur im Gebiet des RVE, sondern für alle \hat{X}^n gefordert. Es ist ersichtlich, dass die Gleichung

$$\frac{(\hat{X}_1^n)^2}{R} \left(\frac{\partial h_1}{\partial R} h_2 h_3 \right) + \frac{(\hat{X}_2^n)^2}{R} \left(h_1 \frac{\partial h_2}{\partial R} h_3 \right) + \frac{(\hat{X}_3^n)^2}{R} \left(h_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial R} \right) \stackrel{!}{=} 1 \quad 4.30$$

für den Fall $R = 0$ keine Lösung haben kann, da die linke Seite in diesem Fall unendlich groß wird. Mit der aus der Definition des Radius abgeleiteten Beziehung $(\hat{X}_3^n)^2 = R^2 - (\hat{X}_1^n)^2 - (\hat{X}_2^n)^2$ lässt sich Gleichung 4.30 in

$$\frac{(\hat{X}_1^n)^2}{R} \underbrace{h_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial R} h_3 - h_1 \frac{\partial h_3}{\partial R} \right)}_A + \frac{(\hat{X}_2^n)^2}{R} \underbrace{h_1 \left(\frac{\partial h_2}{\partial R} h_3 - h_2 \frac{\partial h_3}{\partial R} \right)}_B + \underbrace{R h_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial R} + h_1 h_2 h_3}_{C} \stackrel{!}{=} 1 \quad 4.31$$

umschreiben. Die Differentialgleichung 4.31 ist an allen \hat{X}^n mit der Ausnahme von $\hat{X}^n = \mathbf{0}$ erfüllt, wenn $A = B = 0$ und $C = 1$. Dies führt auf das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} h_2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial R} h_3 - h_1 \frac{\partial h_3}{\partial R} \right) &= 0 \\ h_1 \left(\frac{\partial h_2}{\partial R} h_3 - h_2 \frac{\partial h_3}{\partial R} \right) &= 0 \\ R h_1 h_2 \frac{\partial h_3}{\partial R} + h_1 h_2 h_3 &= 1. \end{aligned} \quad 4.32$$

Hou und Aberatnouve geben in [31] folgende Lösung für das Differentialgleichungssystem 4.32 an:

$$\begin{aligned} h_1(R) &= \alpha_1 \left(1 + \frac{(\alpha_3)^3}{R^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ h_2(R) &= \alpha_2 \left(1 + \frac{(\alpha_3)^3}{R^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ h_3(R) &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left(1 + \frac{(\alpha_3)^3}{R^3} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad 4.33$$

Hierbei sind α_1 , α_2 und α_3 Konstanten, welche durch das Vorgeben von geeigneten Verschiebungsrandbedingungen bestimmt werden können. Danielsson nimmt in [2] lineare Randverschiebungen ($\hat{x}_a^n = \lambda_a \hat{X}_a^n$) auf der Oberfläche der Hohlkugel an, wofür das Verschiebungsfeld die Bedingung

$$h_a(R = R_{\text{außen}}) = \lambda_a \quad 4.34$$

erfüllen muss. Das Auflösen des Gleichungssystems 4.34 führt auf

$$\alpha_1 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-\frac{1}{3}} \lambda_1 \quad \alpha_2 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-\frac{1}{3}} \lambda_2 \quad \alpha_3 = R_{\text{außen}} \sqrt[3]{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1} \quad . \quad 4.35$$

Nach dem Rückeinsetzen der Konstanten α_1 , α_2 und α_3 ist das lokale Verschiebungsfeld

$$\hat{x}_a^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j) = \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1) (R_{\text{außen}})^3}{\left((\hat{X}_1^n)^2 + (\hat{X}_2^n)^2 + (\hat{X}_3^n)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}} \hat{X}_a^n \quad 4.36$$

durch die Abhängigkeit von den makroskopischen Hauptstreckungen direkt mit der Makroebene verknüpft. Aus Gleichung 4.36 lässt sich nun der lokale Deformationsgradient

$$\hat{F}_{ab}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j) = \frac{\partial \hat{X}_a^n}{\partial \hat{X}_b^n} = \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1 - h^3}{h^2 \left((\hat{X}_1^n)^2 + (\hat{X}_2^n)^2 + (\hat{X}_3^n)^2 \right)} \right) \hat{X}_a^n \hat{X}_b^n + h \delta_{ab} \quad 4.37$$

$$\text{mit } h = \left(1 + \frac{J}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1) (R_{\text{au\ss en}})^3} \frac{1}{((\hat{X}_1^n)^2 + (\hat{X}_2^n)^2 + (\hat{X}_3^n)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ableiten und die lokalen Hauptinvarianten

$$\hat{I}_1(\hat{X}_i^n, \lambda_j) = \text{tr} \left((\hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j))^T \cdot \hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j) \right)$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{2}{3}}} \left(h^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \frac{(\lambda_1 \hat{X}_1^n)^2 + (\lambda_2 \hat{X}_2^n)^2 + (\lambda_3 \hat{X}_3^n)^2}{(\hat{X}_1^n)^2 + (\hat{X}_2^n)^2 + (\hat{X}_3^n)^2} \left(\frac{1}{h^4} - h^2 \right) \right) \quad 4.38$$

$$\hat{I}_2(\hat{X}_i^n, \lambda_j) = \frac{1}{2} \left(\left(\text{tr} \left((\hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j))^T \cdot \hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j) \right) \right)^2 - \text{tr} \left(\left((\hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j))^T \cdot \hat{\mathbf{F}}^n(\hat{X}_i^n, \lambda_j) \right)^2 \right) \right)$$

$$= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 h^2} + \frac{\left(\frac{\hat{X}_1^n}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\hat{X}_2^n}{\lambda_2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{X}_3^n}{\lambda_3} \right)^2}{(\hat{X}_1^n)^2 + (\hat{X}_2^n)^2 + (\hat{X}_3^n)^2} \left(h^4 - \frac{1}{h^2} \right) \right) \quad 4.39$$

bestimmen. Mit den in Gleichung 4.38 und 4.39 gegebenen lokalen Hauptinvarianten kann dem Matrixmaterial der Hohlkugel nun jedes beliebige hyperelastische Materialmodell der Form $\hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{I}_1, \hat{I}_2)$ zugewiesen werden, wobei ein potentieller volumetrischer Anteil $\hat{\rho}_0 \hat{\psi}(f)$ aufgrund der Annahme der idealen Inkompressibilität ohnehin entfallen würde. Im Rahmen des Projekts wurde zudem ein Zusammenhang zwischen den mikroskopischen und makroskopischen Hauptstreckungen hergeleitet:

$$\hat{\lambda}_j \left(\hat{I}_1(\hat{X}_i^n, \lambda_j), \hat{I}_2(\hat{X}_i^n, \lambda_j) \right) = \quad 4.40$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{1,1\} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \\ \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(g - \left(j + \frac{2^{2/3} 3 (3d + \hat{I}_1^3 - 27) f^{1/3}}{\hat{I}_1^2 - 3\hat{I}_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right. & \text{andernfalls} \\ \left. \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{2^{1/3} 2\hat{I}_1^2 - 2^{1/3} 6\hat{I}_2 + 2(f^{1/3} \hat{I}_1) + (2f)^{2/3}}{f^{1/3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} & \end{array} \right.$$

$$\text{mit } d = \sqrt{3} \sqrt{27 + 4\hat{I}_1^3 - 18\hat{I}_1 \hat{I}_2 - \hat{I}_1^2 \hat{I}_2^2 + 4\hat{I}_2^3} \quad f = 27 + 3d + 2\hat{I}_1^3 - 9\hat{I}_1 \hat{I}_2$$

$$g = 4\hat{I}_1 - \frac{2^{1/3} 2(\hat{I}_1^2 - 3\hat{I}_2)}{f^{1/3}} - 2^{2/3} f^{1/3} \quad j = 24\hat{I}_1^2 - 72\hat{I}_2 - 2^{2/3} 9\hat{I}_1 f^{1/3} - 2^{1/3} 6f^{2/3}$$

Die dritte Hauptstreckung kann hierbei über den Inkompressibilitatzwang ermittelt werden. Da das Materialmodell für die Elastomermatrix (siehe Kapitel 4.6.2) keine Hauptstreckungsabhangigkeit aufweist, wird die Beziehung 4.40 beim im Projekt entwickelten Modell jedoch nicht genutzt. Grundsätzlich ist hiermit aber eine Verwendung eines beliebigen auf

den Hauptstreckungen basierenden hyperelastischen Materialmodells (z.B. Ogden) für die elastomere Matrix möglich.

Beim Übergang von der Mikro- zur Makroebene, der sogenannten Homogenisierung, wird eine Größe gewählt, aus deren Mittelwert über das RVE-Gebiet die entsprechende makroskopische Größe bestimmt wird. Die meisten Multiskalenmodelle in der Kontinuumsmechanik verwenden hierfür Spannungen als zu homogenisierende Größe; in Danielssons Ansatz ist jedoch eine Homogenisierung der Verzerrungsenergiedichte mit

$$\rho_0 \psi(\lambda_j) = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}^n, \lambda_j) dV_0 \quad 4.41$$

vorgesehen. Für die Integration über das Matrixgebiet in Referenzkonfiguration $\Omega_{M,0}$ ist eine Beschreibung in Kugelkoordinaten (R, α, β) mit

$$\hat{\mathbf{X}}^n = \begin{pmatrix} \hat{X}_1^n \\ \hat{X}_2^n \\ \hat{X}_3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ R \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ R \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad 4.42$$

sinnvoll. Das Aufteilen des Integrals in einen radialen und einen sphärischen Anteil führt schließlich auf:

$$\rho_0 \psi(\lambda_j) = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{R_{innen}}^{R_{außen}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}^n, \lambda_j)) \sin(\alpha) R^2 d\alpha d\beta dR \quad 4.43$$

Wird nun ein Mooney-Rivlin-Potential der Form $\hat{\rho}_0 \hat{\psi} = c_{10}(\hat{I}_1 - 3) + c_{01}(\hat{I}_2 - 3)$ als Materialmodell für die Elastomermatrix gewählt, ergibt sich die makroskopische Verzerrungsenergiedichte

$$\rho_0 \psi(\lambda_j) = \rho_0 \psi(I_1, I_1, J) = c_{10} \left(\varsigma_1 \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}}, J \right) \overbrace{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}{=I_1} - 3 \left(1 - \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3 \right) \right) + \quad 4.44$$

$$c_{01} \left(\varsigma_2 \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}}, J \right) \overbrace{(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2)}{=I_2} - 3 \left(1 - \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3 \right) \right)$$

$$\text{mit } \varsigma_1 \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}}, J \right) = 2 - \frac{1}{J} - \frac{\left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3 + 2(J-1)}{\left(1 + (J-1) \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^{-3} \right)^{1/3} J^{2/3}}$$

$$\varsigma_2 \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}}, J \right) = -1 + \frac{2}{J} - \left(\frac{J-1 + \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3}{J \left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{\left(\frac{R_{innen}}{R_{außen}} \right)^3}{J} - 1 \right).$$

Das makroskopische Potential kann hierbei auch vollständig in Abhängigkeit der makroskopischen Hauptinvarianten geschrieben werden, was die numerische Handhabung erheblich vereinfacht, da der Fall von zwei oder drei identischen Hauptstreckungen nicht gesondert betrachtet werden muss.

Wird ein von den Hauptinvarianten abhängiges Potential, welches nicht mehr linear von \hat{I}_1 und \hat{I}_2 abhängt oder ein von den Hauptstreckungen abhängiges Potential als Materialmodell für die Elastomermatrix gewählt, ist die Integration nicht mehr analytisch möglich. Eine entsprechende Vorschrift für die numerische Integration über das Matrixvolumen ist Kapitel 4.6.3.4 zu entnehmen. Damit in diesem Fall bei der Berechnung der Spannungen das Ableiten nach den makroskopischen Deformationen weiterhin analytisch durchgeführt werden kann, ist ein Vertauschen der Integration und Differentiation sinnvoll. Der makroskopische 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \rho_0 \psi(\lambda_j(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}^n, \lambda_j(\mathbf{C})) dV_0 \right) \\
&= \frac{2}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}^n, \lambda_j(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} \right) dV_0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

kann bei der Verwendung eines isotropen, hyperelastischen Materialmodells für die Elastomermatrix numerisch auch wesentlich effizienter mit der spektralen Zerlegung

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \rho_0 \psi(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) \\
&= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \right) \int_{\Omega_{M,0}} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}^n, \lambda_i)}{\partial \lambda_i} \right) dV_0 (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

bestimmt werden. Hierbei wird ausgenutzt, dass der rechte Streckungstensor \mathbf{U} und der zweite Piola-Kirchhoff-Tensor \mathbf{S} bei isotropen Materialgesetzen identische Eigenvektoren \mathbf{N}_i besitzen. Für die Lösung des mechanischen Problems mit der impliziten finiten Elemente Methode muss ebenfalls die Materialtangente

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} &= \sum_{a=1}^3 \sum_{b=1}^3 \frac{1}{\lambda_b} \frac{\partial}{\partial \lambda_b} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b) + \\
&\sum_{a=1}^3 \sum_{\substack{b=1 \\ (b \neq a)}}^3 \frac{\left(\frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \lambda_a} - \frac{1}{\lambda_b} \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \lambda_b} \right)}{(\lambda_a)^2 - (\lambda_b)^2} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_b \otimes \mathbf{N}_a)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

berechnet werden [32]. Diese liegt hier in Lagrangescher Konfiguration vor, welche ebenfalls von der *hypeIa2*-Schnittstelle von *MSC Marc* genutzt wird. Der Zusammenhang 4.47 gilt jedoch nur für den Fall von drei ungleichen Hauptstreckungen; für die Definition der Materialtangente bei zwei oder drei identischen Hauptstreckungen verweist der Autor ebenfalls auf [32].

4.5.3.1 Erweiterung des Danielsson-Ansatzes - Elastomermatrix mit einem inelastischen Materialmodell

Das Materialverhalten hängt bei inelastischen Materialgesetzen in der Regel nicht mehr nur vom aktuellen Deformationszustand, sondern auch von einer oder mehreren sogenannten Statusvariablen (bzw. internen Variablen) ab. Da eine Statusvariable den Zustand an einem bestimmten Materialpunkt definiert, kann eine Beschreibung des lokalen Verschiebungsfelds

nicht mehr im \hat{x}^n -Koordinatensystem erfolgen, bei welcher die Basis den Eigenvektoren \mathbf{n}_i entspricht, da die Positionen \hat{x}^n bzw. \hat{X}^n nicht mehr einem bestimmten Materialpunkt in der Hohlkugel zugeordnet sind.

Aufgrund dessen wurde das lokale Verschiebungsfeld im Rahmen des Projekts zunächst in ein Koordinatensystem mit der Basis \hat{E}_i (bzw. \hat{e}_i) überführt. In einem ersten Schritt wird die Gleichung 4.36 in Matrixschreibweise

$$\hat{x}^N(\hat{X}^N, \lambda_j) = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)(R_{\text{außen}})^3}{R(\hat{X}^N)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \Lambda(\lambda_j) \cdot \hat{X}^N \quad \text{mit } \Lambda(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad 4.48$$

geschrieben. Es sei angemerkt, dass das Ersetzen von \hat{x}^n und \hat{X}^n durch \hat{x}^N und \hat{X}^N ohne weitere Anpassungen, wie auch in Abbildung 4.37 illustriert, möglich ist.

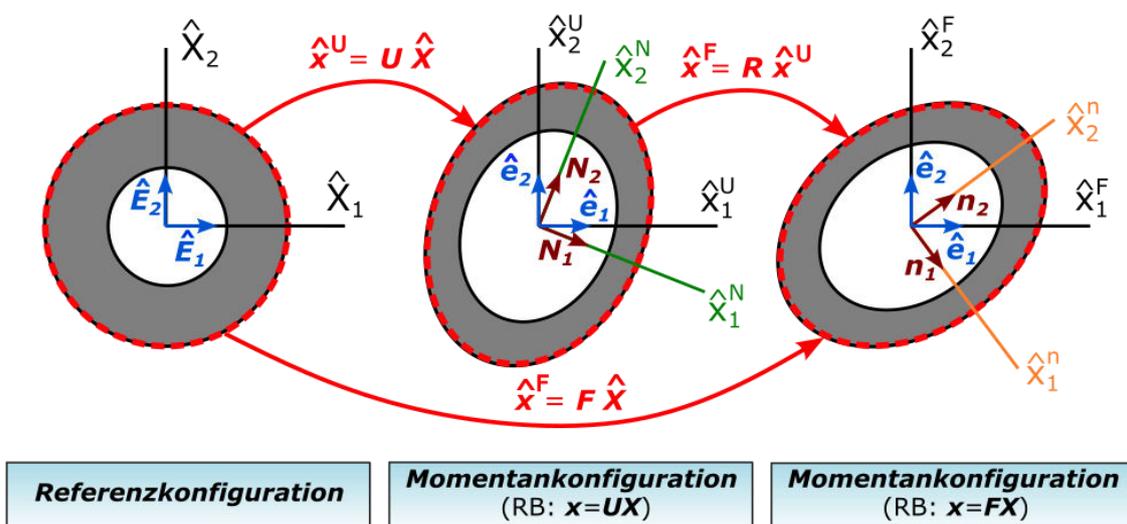


Abbildung 4.37: Deformation des RVE mit der Randbedingung $\hat{x}^U = U \hat{X}$ und der Randbedingung $\hat{x}^F = F \hat{X}$

Die \hat{X}^N bzw. \hat{x}^N -Koordinaten können mit den Beziehungen

$$\hat{x}^N = (\mathbf{R}^N)^T \cdot \hat{x}^U \quad \hat{X}^N = (\mathbf{R}^N)^T \cdot \hat{X} \quad \text{mit } \mathbf{R}^N = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) \quad 4.49$$

ins \hat{X} bzw. \hat{x}^U -KOS überführt werden, wobei die Eigenvektoren \mathbf{N}_i auf eine Länge von eins normiert sein müssen. Da der Radius R invariant gegenüber einer Rotation ist, gilt $R(\hat{X}) = R(\hat{X}^N)$, wodurch das Verschiebungsfeld 4.48 vollständig im \hat{X} bzw. \hat{x}^U -KOS geschrieben werden kann:

$$\hat{x}^U(\hat{X}, \lambda_j) = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)(R_{\text{außen}})^3}{R(\hat{X})^3} \right)^{\frac{1}{3}} \underbrace{\mathbf{R}^N \cdot \Lambda(\lambda_j) \cdot (\mathbf{R}^N)^T \cdot \hat{X}}_{\varpi(\hat{X}, \lambda_j)}. \quad 4.50$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\hat{x}^U(\hat{X}, \lambda_j) = \varpi(\hat{X}, \lambda_j) \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i) \right) \cdot \hat{X}, \quad 4.51$$

wobei $\lambda_i(N_i \otimes N_i)$ der spektralen Zerlegung des rechten Streckungstensors \mathbf{U} entspricht, wodurch das lokale Verschiebungsfeld wie folgt auch in etwas kompakterer Form geschrieben werden kann:

$$\hat{\mathbf{x}}^U(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j, \mathbf{U}) = \varpi(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j) \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{X}} . \quad 4.52$$

Unabhängig vom Deformationszustand gilt auf dem Rand des repräsentativen Volumenelements

$$\varpi(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j) = 1 \quad (\text{auf } \partial\Omega) , \quad 4.53$$

womit die Randbedingung

$$\hat{\mathbf{x}}^U = \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{X}} \quad (\text{auf } \partial\Omega) \quad 4.54$$

auf der gesamten Außenfläche der Hohlkugel erfüllt ist. Obwohl für die elastomere Matrix nur ein isotropes Materialmodell genutzt wird, kann das makroskopische Verhalten des Modells anisotrop sein. Die Anisotropie wird hier durch eine unterschiedliche Evolution der Statusvariablen in den einzelnen Bereichen der Hohlkugel verursacht, wodurch sich makroskopisch Vorzugsrichtungen ergeben können. Da die Starrkörperrotation mit dem Rotationstensor \mathbf{R} bei anisotropen Materialmodellen zur Gewährleistung der materiellen Objektivität nicht vernachlässigt werden darf, wird das Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{x}}^U(\hat{\mathbf{X}})$ mit \mathbf{R} rotiert, womit sich das rotierte Verschiebungsfeld

$$\hat{\mathbf{x}}^F(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j, \mathbf{U}) = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{x}}^U(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j, \mathbf{U}) = \varpi(\hat{\mathbf{X}}, \lambda_j, \mathbf{U}) \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{X}} \quad 4.55$$

ergibt, welches die Randbedingung

$$\hat{\mathbf{x}}^F = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad 4.56$$

erfüllt. Um das Ableiten des Spannungstensors und der Materialtangente zu vereinfachen, sollte $\hat{\mathbf{x}}^F(\hat{\mathbf{X}})$ lediglich vom Deformationsgradienten \mathbf{F} und nicht mehr zusätzlich von den Hauptstreckungen λ_j abhängen. Mit der Beziehung $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(\mathbf{F})$ ergibt sich schließlich

$$\hat{\mathbf{x}}^F(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}) = \frac{1}{(\det(\mathbf{F}))^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{(\det(\mathbf{F}) - 1)(R_{\text{außen}})^3}{(R(\hat{\mathbf{X}}))^3} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}} . \quad 4.57$$

Nach einigen weiteren Umformungen lässt sich zeigen, dass das Verschiebungsfeld 4.57 auch als eine Sequenz von zwei hintereinander angewandten Teildeformationen interpretiert werden kann, die jeweils vom volumetrischen ($\det(\mathbf{F})$) und deviatorischen Anteil \mathbf{F}_{iso} des makroskopischen Deformationsgradienten bewirkt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}^F(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}) = \underbrace{\mathbf{F}_{iso} \left(1 + \frac{(\det(\mathbf{F}) - 1)(R_{\text{außen}})^3}{(R(\hat{\mathbf{X}}))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}_{\hat{\mathbf{x}}^{int}} \hat{\mathbf{X}} . \quad 4.58$$

Eine schematische Illustration der RVE-Geometrie in Referenz-, Zwischen- und Momentankonfiguration ist in Abbildung 4.38 gegeben.

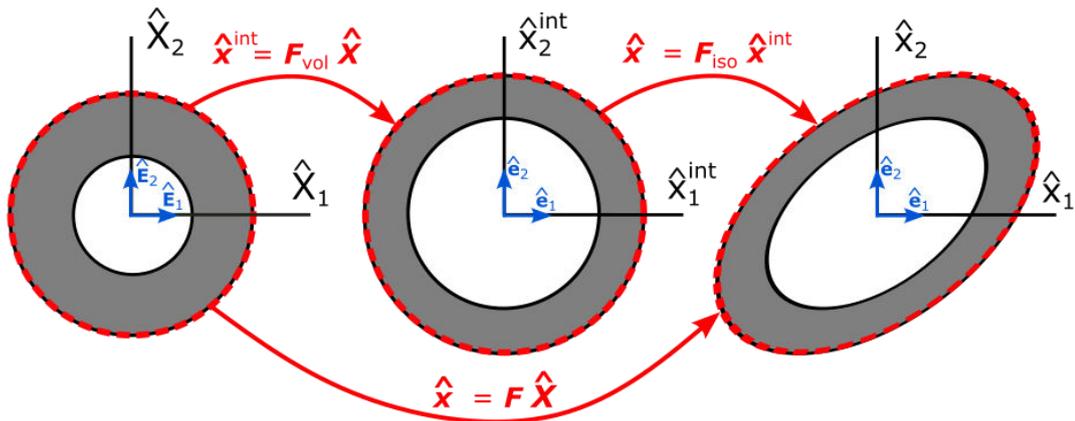


Abbildung 4.38: Schematische Darstellung der Deformation des RVE beim schrittweisen Aufbringen der Randbedingung $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{iso} \cdot (\mathbf{F}_{vol} \cdot \hat{\mathbf{X}})$

Es ist ersichtlich, dass sich die Materialpunkte in der Hohlkugel bei der volumetrischen Teildeformation auf vom Koordinatenursprung ausgehenden Geraden bewegen:

$$\hat{\mathbf{x}}^{int}(\det(\mathbf{F}), \hat{\mathbf{X}}) = \left(1 + \frac{(\det(\mathbf{F}) - 1)(R_{au\beta en})^3}{(R(\hat{\mathbf{X}}))^3} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{X}}. \quad 4.59$$

Die im Anschluss stattfindende Teildeformation der vordeformierten Hohlkugel mit dem isochoren Anteil des Deformationsgradienten als Randbedingung führt auf ein homogenes Verschiebungsfeld der Form

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{F}_{iso}, \hat{\mathbf{x}}^{int}) = \mathbf{F}_{iso} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{int}. \quad 4.60$$

Hieraus folgt, dass bei einer rein isochoren makroskopischen Deformation, der Deformationszustand in der Hohlkugel an jedem lokalen Materialpunkt dem makroskopischen Deformationszustand entspricht. Erst eine Überlagerung mit einer volumetrischen Deformation führt zu einem inhomogenen lokalen Deformationszustand. Diese Eigenschaft ist auch in Abbildung 4.39 ersichtlich, bei der die erste Invariante in der Hohlkugel für den Fall der einfachen Scherung (li.) und der einfachen Scherung mit freier Dehnung in z-Richtung (re.) graphisch dargestellt ist.

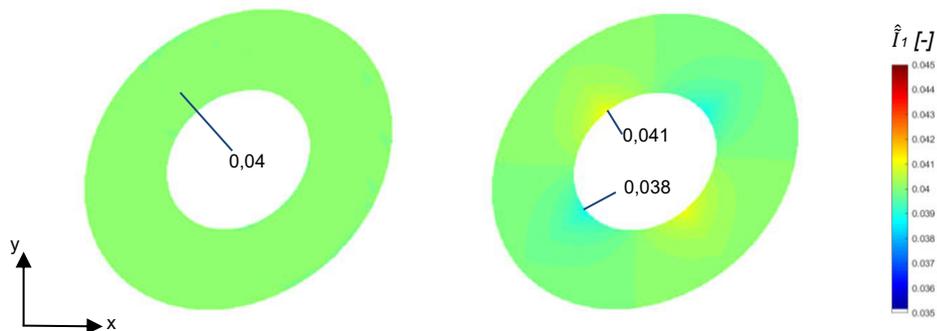


Abbildung 4.39: Invariante \hat{I}_1 im deformierten RVE mit einem initialen Porenvolumenanteil $\phi = 0,1$ im Schnitt bei $z = 0$; einfache Scherung mit $\gamma_{xy} = 22,5^\circ$ bei verhinderter Dehnung in z-Richtung (li.) bei freier Dehnung in z-Richtung (re.)

In Abbildung 4.40 ist zu sehen, dass die erste Invariante sowohl bei hydrostatischem Zug (li.) als auch bei hydrostatischem Druck (re.) an der Innenfläche ihr Maximum erreicht. Bemerkenswert ist zudem, dass selbst bei einer sehr niedrigen hydrostatischen Druckdeformation mit $\lambda = 0,97$ lokal extrem große Deformationen ($\hat{I}_1 = 6,27$) auftreten.

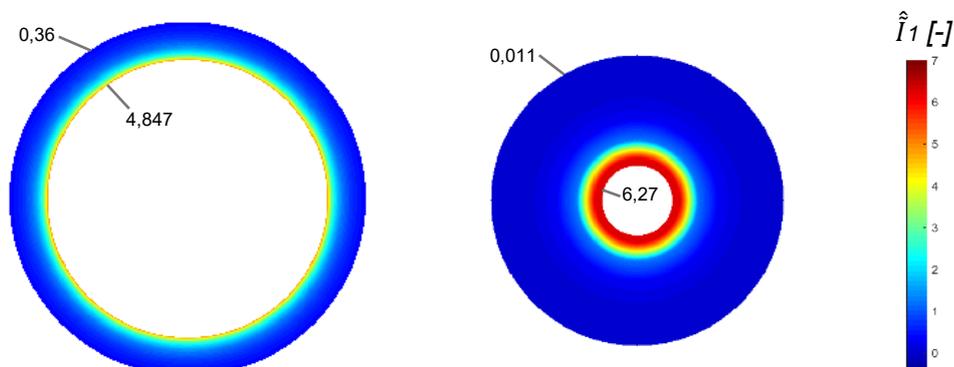


Abbildung 4.40: Invariante \hat{I}_1 im deformierten RVE mit einem initialen Porenvolumenanteil $\phi = 0,1$ im Schnitt bei $z = 0$; hydrostatischer Zug mit $J = 1,2^3$ (li.) und hydrostatischem Druck mit $J = 0,97^3$ (re.)

Da die Validierung des Modells im Projekt vor allem mit uniaxialen Zugversuchen erfolgt ist, wurde schließlich auch dieser Fall betrachtet. Abbildung 4.41 ist zu entnehmen, dass hierbei sowohl das Maximum als auch das Minimum an der Innenfläche der Hohlkugel auftritt.

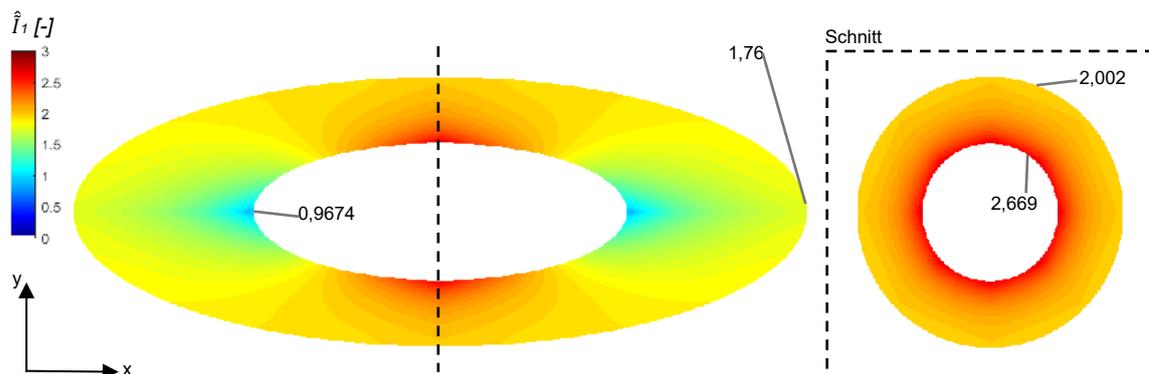


Abbildung 4.41: Invariante \hat{I}_1 im deformierten RVE mit einem initialen Porenvolumenanteil $\phi = 0,1$ unter uniaxialer Zug mit $\lambda_x = 2$ im Schnitt bei $z = 0$ (li.) und $x = 0$ (re.)

Zur Erstellung der Abbildungen 4.29 bis 4.31 wurde die Subroutine um eine Schnittstelle zum Export von beliebigen Variablen an den Integrationspunkten des RVE erweitert. Die aufgenommenen Daten können in ein *MATLAB*-Skript importiert werden, welches die gewünschte Variable in einem Schnitt, wahlweise in deformierter oder undeformierter Konfiguration, darstellt.

Mit dem Verschiebungsfeld $\hat{x}(\hat{X}, \mathbf{F})$ können schließlich auch der lokale Deformationsgradient

$$\hat{F}_{ij}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}) = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \hat{X}_j} = \frac{F_{ij}(R(\hat{\mathbf{X}}))^5 + \sqrt[3]{\det(\mathbf{F}) - 1} \left[F_{ij} \left(\sum_{k=1, k \neq j}^3 \hat{X}_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1, k \neq j}^3 \hat{X}_k F_{ik} \right) \hat{X}_j \right]}{\det(\mathbf{F})^{\frac{1}{3}} (R(\hat{\mathbf{X}}))^5 \left(1 + \frac{\det(\mathbf{F}) - 1}{(R(\hat{\mathbf{X}}))^3} \right)^{\frac{2}{3}}} \quad 4.61$$

und die lokale erste Invariante

$$\hat{I}_1(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}) = \left(\det(\mathbf{F})^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{\det(\mathbf{F}) - 1}{R(\hat{\mathbf{X}})^3} \right)^{\frac{4}{3}} \right)^{-1} \quad 4.62$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(F_{ij} - \frac{(\det(\mathbf{F}) - 1) \hat{X}_i \sum_{k=1}^3 (F_{ik} \hat{X}_k)}{R(\hat{\mathbf{X}})^5} + \frac{F_{ij} (\det(\mathbf{F}) - 1)}{R(\hat{\mathbf{X}})^3} \right)^2 \right)$$

bestimmt werden. Darüber hinaus ist zu beachten, dass aufgrund der Formulierung der Verzerrungsenergiedichte in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten bei der Herleitung des Spannungstensors

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \rho_0 \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad 4.63$$

und der Materialtangente zusätzlich eine Konversion von der gemischten in die Lagrangesche Konfiguration (MSC Marc) erforderlich ist.

Ob das Materialmodell mit sinkendem Porenvolumenanteil $\phi \rightarrow 0$ gegen das ideal-inkompressible Materialmodell der Elastomermatrix läuft, wurde mittels einer Konvergenzanalyse untersucht. Hierfür wurde die Modellantwort bei uniaxialer Belastung – Spannung in Zugrichtung und die Querdehnung - bei unterschiedlichen Porenvolumenanteilen betrachtet und mit der Modellantwort des ideal-inkompressiblen Vollmaterialmodells verglichen. Die in Abbildung 4.42 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass sich das Materialmodell des Schaums tatsächlich konsistent zum Vollmaterialmodell verhält und mit sinkendem Porenvolumenanteil gegen die Modellantwort des ideal-inkompressiblen Materials läuft.

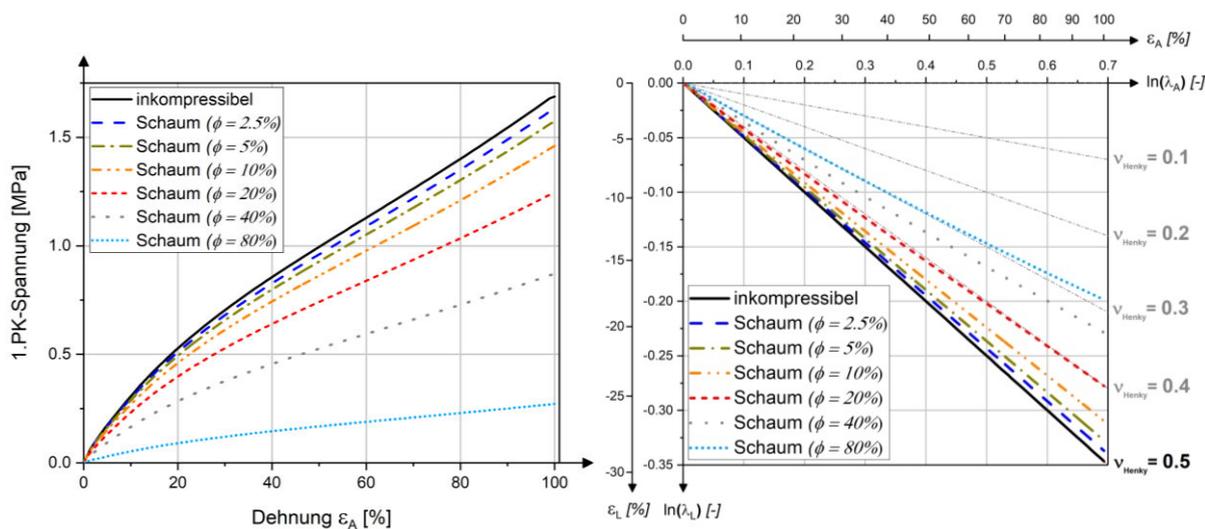


Abbildung 4.42: 1.PK-Spannung (li.) und Querdehnung (re.) bei uniaxialer Zugbelastung für das ideal-inkompressible Vollmaterialmodell und das Schaum-Modell bei variierendem Porenvolumenanteil; Parametersatz von Material DIK-3, $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$, $\varepsilon_A = 3 \text{ \%}/s$

4.5.3.2 Erweiterung des Danielsson-Ansatzes - Schäume mit poreninduzierter Anisotropie

Wird zur Herstellung eines Elastomerschaums das Expansionsverfahren genutzt, zeigt dieser üblicherweise sphäroidförmige Poren, die in Richtung des Auftreibens ausgerichtet sind. Um die aus der Mikrostruktur resultierende makroskopische Anisotropie berücksichtigen zu können, wurde im Rahmen des Projekts neben einer Hohlkugel ein Hohlrotationsellipsoid als RVE genutzt.

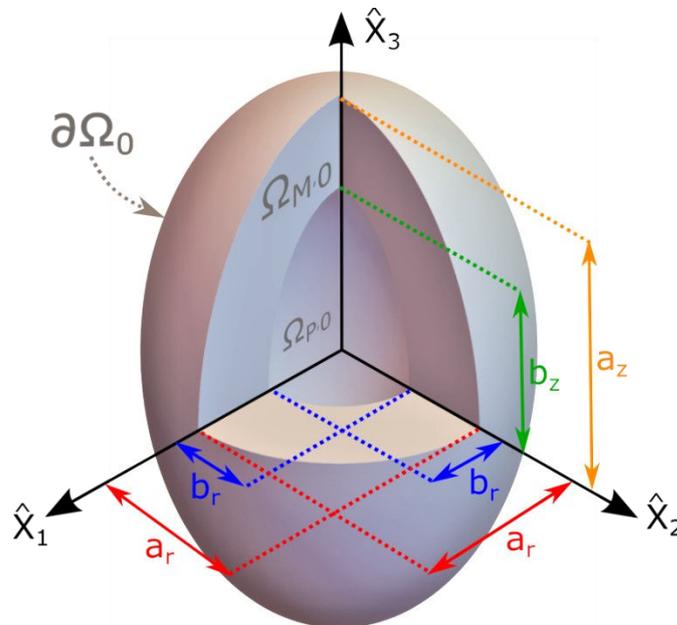


Abbildung 4.43: Geometrie des fokaloideförmigen repräsentativen Volumenelements

Die Porenform wird hierbei vom Porenseitenverhältnis

$$c_A = \frac{b_z}{b_r} > 1 \quad 4.64$$

vorgegeben. Es wird angenommen, dass die Außenfläche ein zur Innenfläche konfokales Sphäroid ist, welches somit die Bedingung

$$(a_z)^2 - (a_r)^2 = (b_z)^2 - (b_r)^2 \quad 4.65$$

erfüllt. Die sich ergebende Geometrie wird auch als Fokaloid bezeichnet und wurde erstmals von [33] als RVE zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung durch den Hohlraumanteil beim plastischen Fließen von Metallen genutzt. Für die Modellierung der Mikrostruktur von Elastomerschäumen wurde ebenfalls in [34] von Avazmohammadi ein Fokaloid als RVE verwendet. Die bestehenden Modellierungsansätze beschränken sich hierbei jedoch nur auf axialsymmetrische Deformationszustände, weswegen ein Einsatz nur bei sehr wenigen, eher theoretischen Fragestellungen möglich ist. Im Rahmen des durchgeführten Projekts wurde das Modell von Avazmohammadi so erweitert, dass beliebige makroskopische Deformationszustände vorliegen können. Mit der Definition 4.64 und 4.65 und der Definition des Porenvolumenanteils

$$\frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} = \frac{b_z(b_r)^2}{a_z(a_r)^2} \quad 4.66$$

ist die Geometrie des repräsentativen Volumenelements eindeutig beschrieben. Es sei angemerkt, dass das RVE (wie auch bei Danielssons Hohlkugelansatz) keine absolute Größe besitzt, da das mikroskopische Randwertproblem skalenunabhängig ist. In Abbildung 4.44 ist die RVE-Geometrie exemplarisch für den Fall $c_A = 3$ bei variierendem Porenvolumenanteil ϕ dargestellt.

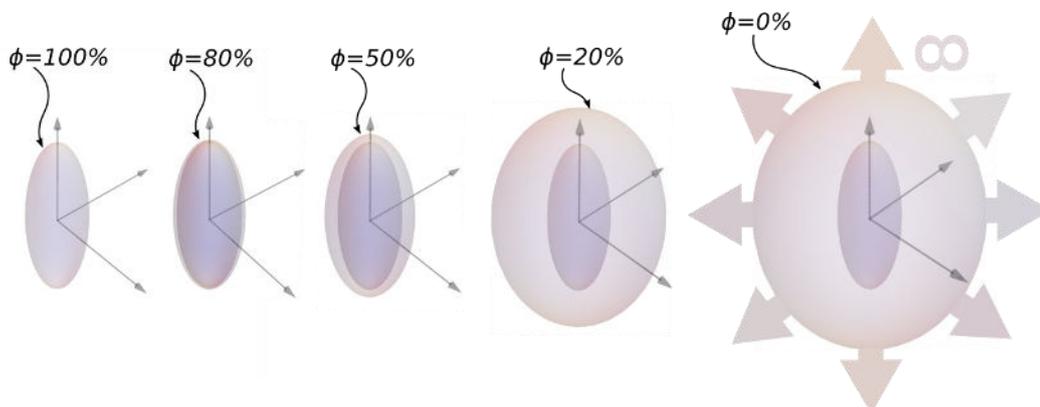


Abbildung 4.44: RVE-Geometrie bei einem konstanten Porenseitenlängenverhältnis $c_A = 3$ und variierendem Porenvolumenverhältnis

Es ist zu erkennen, dass das äußere Sphäroid (mit Ausnahme von $\phi = 0$) ein niedrigeres Seitenlängenverhältnis $a_z/a_r < c_A$ aufweist als das innere Sphäroid. Für den Fall $\phi \rightarrow 0$ geht das RVE in eine Kugel mit einem unendlich großen Radius über, welche den sphäroidförmigen Einschluss enthält.

Als Randbedingung werden wie beim Hohlkugelmodell lineare Randverschiebungen

$$\hat{x} = F \cdot \hat{X} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad 4.67$$

gewählt. Da das Auffinden eines Verschiebungsfelds, welches zum einem die Eigenschaft der idealen Inkompressibilität im Matrixgebiet Ω_M und zum anderen die Randbedingung 4.67 auf der sphäroiden Außenfläche erfüllen muss, sehr schwierig ist, wird die Randbedingung analog zu 4.59 und 4.60 zerlegt:

$$\hat{x}^{int} = F_{vol} \cdot \hat{X} \quad \text{auf } \partial\Omega_{int} \quad 4.68$$

$$\hat{x} = F_{iso} \cdot \hat{x}^{int} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad 4.69$$

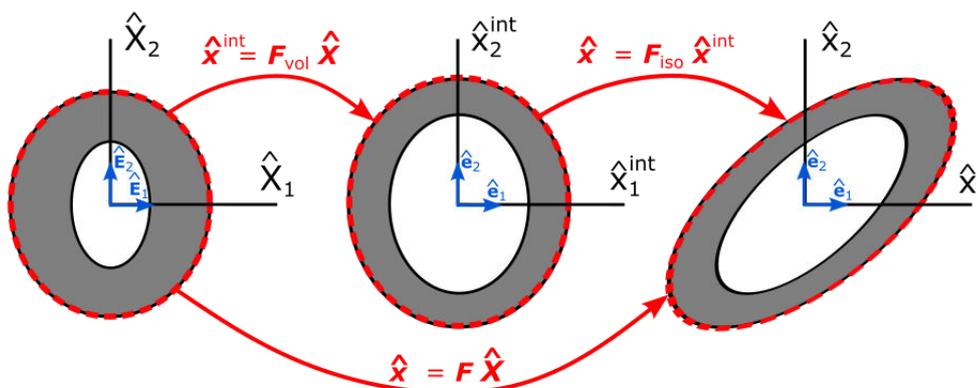


Abbildung 4.45: Schematische Darstellung der Deformation des RVE beim schrittweisen Aufbringen der Randbedingung $\hat{x} = F_{iso} \cdot (F_{vol} \cdot \hat{X})$

Wie auch in Abbildung 4.45 dargestellt, wird zunächst ein lokales Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{x}}^{int}(\hat{\mathbf{X}})$ gesucht, welches die Inkompressibilitätsbedingung $\det(\partial\hat{\mathbf{x}}^{int}/\partial\hat{\mathbf{X}}) = 1$ und die Randbedingung 4.68 erfüllt. Hierfür kann das bereits von Avazmohammadi hergeleitete Verschiebungsfeld

$$\hat{\mathbf{x}}^{int} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{X}}) \cdot \hat{\mathbf{X}} \quad \text{wobei } T_{ij} = \delta_{ij} \phi_i \quad 4.70$$

mit

$$\phi_1(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) = \phi_2(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) = \operatorname{cosech}(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) \left[\frac{C_1 \cosh(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) \sinh^2(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) - 1}{C_1 C_2 Y_P} \right]^{0,5}$$

$$\phi_3(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) = C_2 \operatorname{sech}(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}})) Y_P$$

$$Y_P = \prod_{i=1}^3 (\cosh(\mathcal{E}) - \delta_i)^{\frac{\delta_i^2 - 1}{3\delta_i^2 - 1}}$$

$$\Gamma = \left\{ \left[9 + \sqrt{3(27 - 4C_1^2)} \right] C_1^2 \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$\delta_1 = (\sqrt[3]{12}\Gamma^2 + 2\sqrt[3]{18}C_1^2)/(6C_1\Gamma)$$

$$\delta_2 = [(\sqrt{3}i - 1)\sqrt[3]{12}\Gamma^2 - 2\sqrt[3]{18}(\sqrt{3}i + 1)C_1^2]/(12C_1\Gamma)$$

$$\delta_3 = -[(\sqrt{3}i - 1)\sqrt[3]{12}\Gamma^2 - 2\sqrt[3]{18}(\sqrt{3}i - 1)C_1^2]/(12C_1\Gamma)$$

genutzt werden. C_1 und C_2 entsprechen hierbei Konstanten, die mit der Randbedingung 4.68 bestimmt werden. Das Einsetzen der Randbedingung in das Verschiebungsfeld führt schließlich auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \operatorname{arccoth}(a_z/a_r)) &= \phi_2(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \operatorname{arccoth}(a_z/a_r)) = J^{\frac{1}{3}} \\ \phi_3(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \operatorname{arccoth}(a_z/a_r)) &= J^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad 4.71$$

Hierbei sind $(\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}}), \theta(\hat{\mathbf{X}}), H(\hat{\mathbf{X}}))$ sogenannte prolate sphäroidale Koordinaten, wobei der Rand des RVE bei $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{X}}) = \operatorname{arccoth}(a_z/a_r)$ liegt. Die Lösung des hochgradig nichtlinearen Gleichungssystems 4.71 ist nur mit numerischen Verfahren möglich, wobei das Konvergenzverhalten hier sehr stark von den gewählten Startparametern abhängt. Um Konvergenz und einen schnellen Programmablauf zu gewährleisten, wurde das Gleichungssystem für 1530 verschiedene $(J, a_z/a_r)$ -Kombinationen vorgelöst und tabellarisch in der Subroutine hinterlegt. Eine bilineare Interpolation dieser tabellarischen Werte dient schließlich als Startwert für die Lösung des Gleichungssystems mit dem Newton-Raphson-Verfahren.

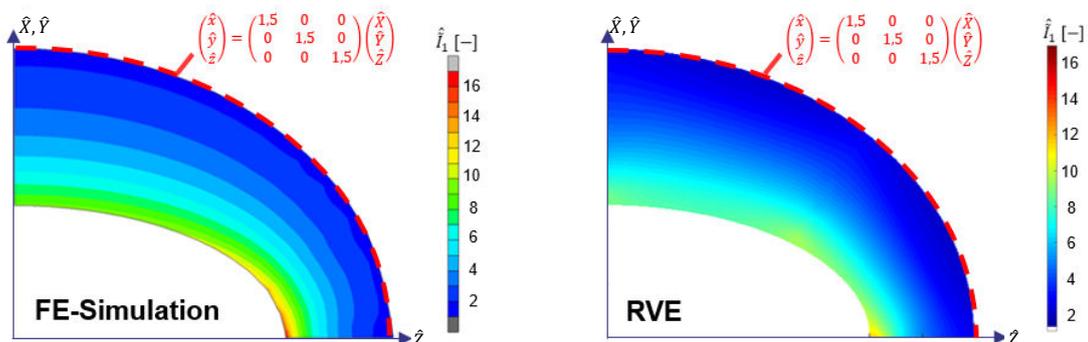


Abbildung 4.46: Erste Invariante im Fokaloid bei makroskopisch hydrostatischem Zug bei einer FE-Simulation (li.) und Simulation mit dem RVE (re.) (Materialmodell: Mooney-Rivlin mit $c_{10} = 1,03$; $c_{10} = 0,0114$ und $K = 11,5$ GPa)

Um zu überprüfen, ob sich das RVE mit dem Verschiebungsfeld $\hat{\mathbf{x}}^{int}(\hat{\mathbf{X}})$ realitätsnah verformt, wurden Berechnungen mit einem FE-Vergleichsmodell durchgeführt. Hierfür wurde sowohl die Rotations- als auch die Achsensymmetrie ausgenutzt. Der elastomeren Matrix wurde ein Mooney-Rivlin-Potential mit einem konstanten Kompressionsmodul von 11500 MPa zugewiesen. Die sich bei hydrostatischem Zug ($J = 1,5^3$) in der FE-Simulation ergebende erste Invariante im Fokaloid ist in Abbildung 4.46 der Lösung mit dem Verschiebungsfeld 4.70 gegenübergestellt.

Es ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Modellen zu erkennen, wobei die beiden Lösungen bei Untersuchungen mit anderen RVE-Geometrien und Volumenverhältnissen J auch stets sehr ähnlich waren.

Das volumetrisch vordeformierte Hohlkugelsphäroid wird mit dem homogenen Verschiebungsfeld

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{iso} \cdot \hat{\mathbf{x}}^{int}, \tag{4.72}$$

welches sowohl die zweite Teil-Randbedingung 4.69 als auch den Inkompessibilitätszwang $\det(\partial\hat{\mathbf{x}}_{int}/\partial\mathbf{X}) = 1$ erfüllt, in ein nicht mehr (zwangsläufig) rotationssymmetrisches Hohlkugelsphäroid deformiert. Das vollständige Verschiebungsfeld, welches die Randbedingung 4.67 erfüllt, ergibt sich somit wie folgt:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{iso} \cdot \mathbf{T}(\hat{\mathbf{X}}) \cdot \hat{\mathbf{X}}. \tag{4.73}$$

Bisher wurde angenommen, dass das RVE im undeformierten Zustand in z-Richtung ausgerichtet ist. Grundsätzlich ist aber eine Drehung in eine beliebige Richtung mit einer orthonormalen Rotationsmatrix der Form $\mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2)$ möglich. Aufgrund der Rotationssymmetrie genügen zwei Winkel ζ_1 und ζ_2 zur Beschreibung der Ausrichtung, wodurch das Verschiebungsfeld mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \mathbf{F}_{iso} \cdot \mathbf{T}(\hat{\mathbf{X}}) \cdot (\mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2))^T \cdot \hat{\mathbf{X}}. \tag{4.74}$$

definiert ist. Neben dem Verschiebungsfeld muss auch das Integrationsgebiet (siehe Abschnitt 4.5.3.4) gegenüber der Modellierung mit einer Hohlkugel angepasst werden.

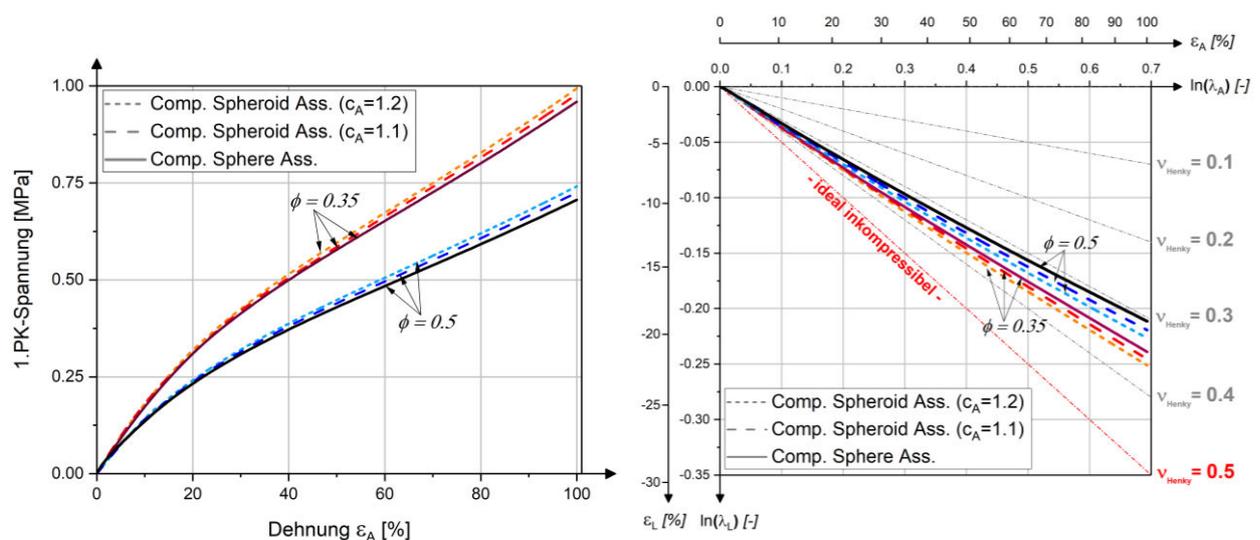


Abbildung 4.47: 1.PK-Spannung (li.) und Querdehnung (re.) bei uniaxialer Zug für die Hohlkugel als RVE und das Hohlkugelsphäroid als RVE; Parametersatz von Material DIK-3; $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$; $\dot{\epsilon}_A = 3 \text{ \%}/s$

Für $C_A \rightarrow 1$ geht das sphäroidförmige RVE in eine Hohlkugel über, weswegen die beiden Modelle für diesen Grenzfall idealerweise des selbe Verhalten zeigen sollten. Dies wurde exemplarisch für zwei verschiedene Porenvolumenanteile bei uniaxialem Zug parallel zur Rotationsachse untersucht. Abbildung 4.47 ist zu entnehmen, dass die Modelle tatsächlich für den Grenzfall $C_A \rightarrow 1$ ineinander übergehen. Da das Modell bei $C_A \approx 1$ numerisch instabil wird, konnten jedoch keine kleineren Werte als $C_A = 1,1$ untersucht werden.

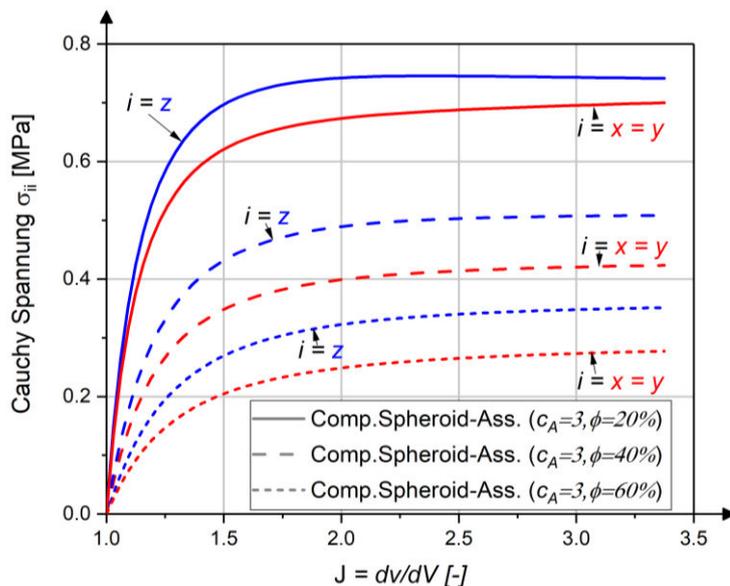


Abbildung 4.48: Cauchy-Spannung bei hydrostatischem Zug bei einem konstanten Porenseitenlängenverhältnis $c_A = 3$ und variierendem Porenvolumenverhältnis (Parametersatz: DIK-3; $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$; $\dot{\epsilon}_A = 0,3 \text{ \%}/s$)

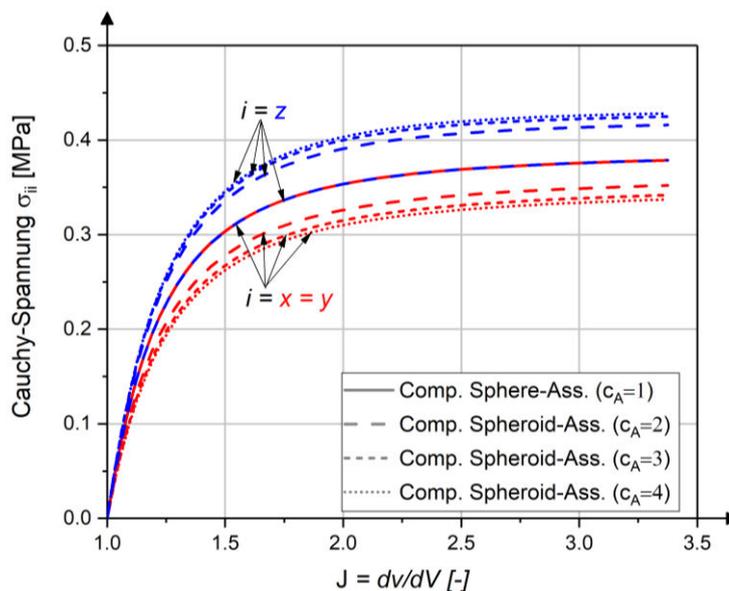


Abbildung 4.49: Cauchy-Spannung bei hydrostatischem Zug bei einem variierendem Porenseitenlängenverhältnis und einem konstanten Porenvolumenverhältnis $\phi = 50\%$ (Parametersatz: DIK-3; $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$; $\dot{\epsilon}_A = 0,3 \text{ \%}/s$)

Das RVE verursacht makroskopisch transversal isotropes Materialverhalten, wobei die Vorzugsrichtung parallel zur Rotationsachse ist. So ist die Spannungsantwort bei hydrostatischem Zug nicht mehr in alle Raumrichtungen identisch, sondern kann sich abhängig von der Ausrichtung des RVE in den einzelnen Richtungen unterscheiden. Dieser Effekt ist auch in Abbildung 4.48 ersichtlich, welche die einzelnen Komponenten des Cauchy-Spannungstensors

bei hydrostatischem Zug für drei unterschiedliche Porenvolumenanteile zeigt. Es ist zu erkennen, dass sich das RVE in Vorzugsrichtung steifer verhält als in der isotropen x-y-Ebene, wobei dieser Effekt bei einem niedrigen Porenvolumenanteil weniger stark ausgeprägt ist. Mit steigendem Porenseitenlängenverhältnis C_A erhöht sich der Grad der Anisotropie jedoch zunehmend weniger. Dies ist beispielsweise Abbildung 4.49 zu entnehmen, welche die Spannungsantwort unter hydrostatischem Zug bei variierendem Porenseitenlängenverhältnis zeigt.

Da das Materialverhalten bei der Theorie großer Deformationen nicht mehr mit technischen Kennwerten wie Elastizitätsmodul, Schermodul und Querdehnzahl charakterisiert werden kann, ist eine umfassende Untersuchung zum Einfluss der Porenkennwerte auf das makroskopische Verhalten sehr aufwendig. Aufgrund dessen wurde sich auf den Bereich infinitesimal kleiner Deformationen beschränkt, um für diesen Fall die E-Moduln E_z und $E_x = E_y$, den Schermodul $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz}$ und die Querdehnzahlen $\nu_{xy} = \nu_{yx}$, $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ und $\nu_{zx} = \nu_{zy}$ zu bestimmen. Die entsprechenden Werte für die DIK Eigenherstellung „DIK-3“ sind für einige Variationen an RVE-Geometrien Abbildung 4.50 zu entnehmen. Es ist ersichtlich, dass der Elastizitätsmodul bei einem Porenseitenlängenverhältnis $c_A > 1$ in z-Richtung größer ist als in x und y-Richtung. Die Elastizitätsmoduln hängen jedoch sehr viel stärker vom Porenvolumenanteil als vom Porenseitenlängenverhältnis ab.

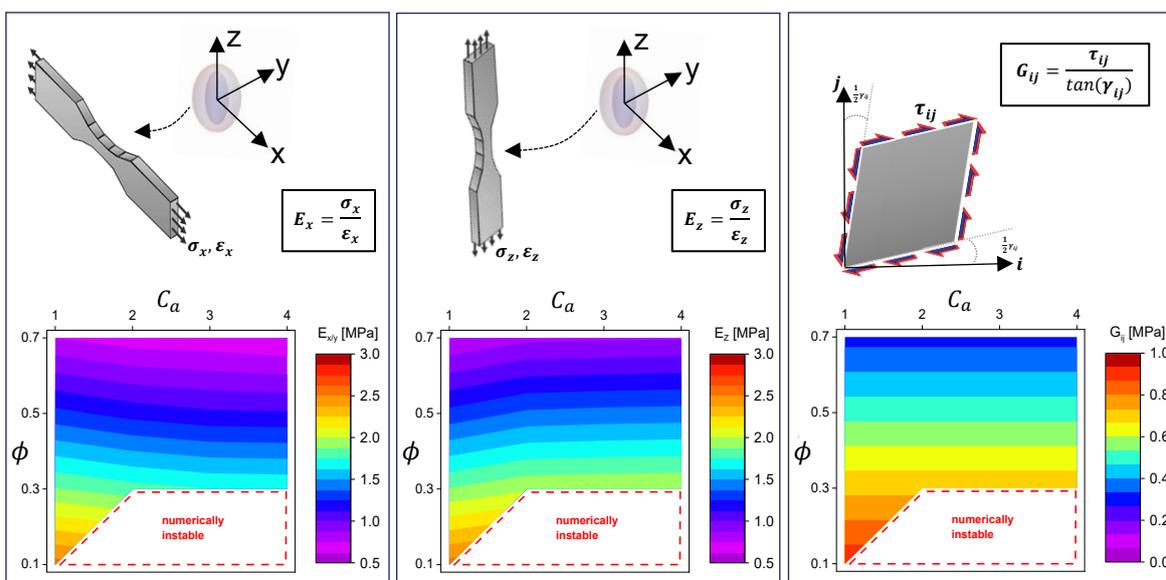


Abbildung 4.50: E-Moduln E_z und $E_x = E_y$; Schermodul $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz}$ des Modells (unter der Annahme von infinitesimal kleinen Deformationen); Parametersatz der Eigenherstellung „DIK-3“

Darüber hinaus fällt auf, dass die Schermoduln unabhängig vom Porenseitenlängenverhältnis sind, wobei dies eine Folge der Annahme eines homogenen, lokalen Verschiebungsfelds bei makroskopisch isochorer Belastung ist. Inwieweit diese Annahme getroffen werden kann, könnten FE-Simulationen mit verschiedenen fokaloïden RVE-Geometrien und Porenvolumenverhältnissen zeigen. Der Einfluss der RVE-Geometrie auf das Querdehnverhalten ist in Abbildung 4.51 dargestellt, wobei die Querdehnzahl ν_{xy} auch bei den im Projekt durchgeführten experimentellen Untersuchungen für die Modellvalidierung gemessen worden ist. Das Modell sagt bei einem steigendem Porenseitenlängenverhältnis grundsätzlich ein Absinken der Querdehnzahl ν_{xy} voraus.

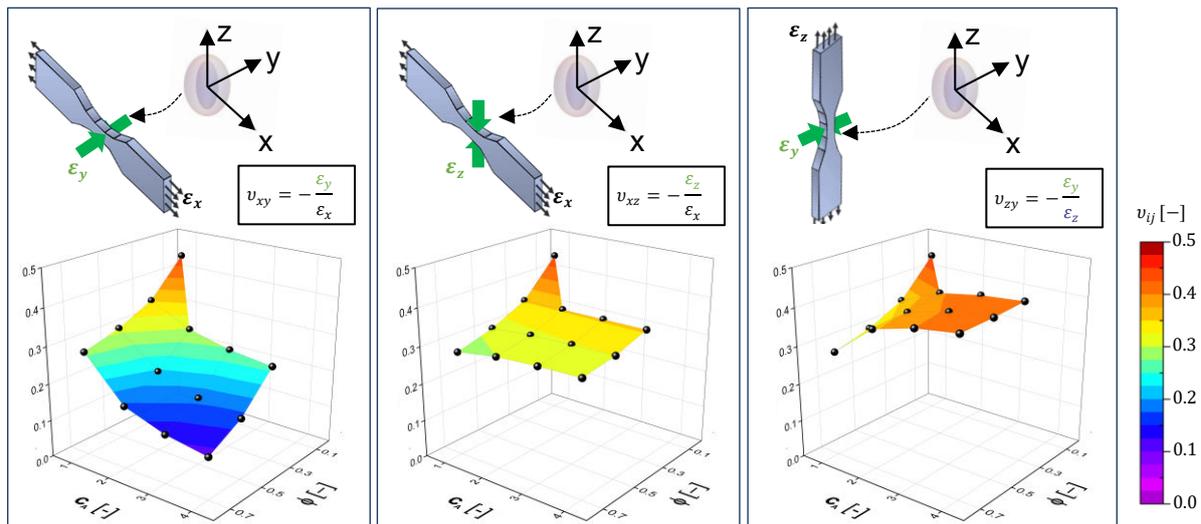


Abbildung 4.51: Querdehnzahlen $v_{xy} = v_{yx}$, $v_{xz} = v_{yz}$ und $v_{zx} = v_{zy}$ des Modells (unter der Annahme von infinitesimal kleinen Deformationen); Parametersatz der Eigenherstellung „DIK-3“

4.5.3.3 Erweiterung des Danielsson-Ansatzes - Einfluss des Gasdrucks

Da sich bei einer makroskopischen mechanischen Belastung nicht nur die Elastomermatrix deformiert, sondern auch das Porengas in seinem Volumen ändern kann, wird dies mittels eines zusätzlichen Beitrags zur makroskopischen Spannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{matrix} - \underbrace{p_{rel}}_{\sigma_{gas}} \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{matrix} - \underbrace{J p_{rel}}_{S_{gas}} \mathbf{C}^{-1} \quad 4.75$$

berücksichtigt. Hierbei ist der aktuelle relative Gasdruck in den Poren p_{rel} noch unbekannt und muss über eine geeignete Annahme aus der Änderung des Porenvolumens bestimmt werden. [35] schlägt hierfür das ideale Gasgesetz für isotherme Prozesse

$$p_{abs} = p_{abs,0} \frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_P|} \quad \text{bzw.} \quad p_{rel} = p_{abs} - p_{abs,0} = p_{abs,0} \left(\frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_P|} - 1 \right) \quad 4.76$$

und dessen Modifikation für adiabate Prozesse vor, wobei Ersteres für die Modellierung im Projekt genutzt wurde. Als zusätzlicher Modellparameter ergibt sich der absolute Gasdruck im undeformierten Zustand $p_{abs,0}$, welcher zusammen mit dem Verhältnis des aktuellen Porenvolumens zum initialen Porenvolumen

$$\frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_P|} = \frac{4/3 \pi b_z b_r^2}{J^{4/3} \pi a_z a_r^2 - |\Omega_M|} \quad 4.77$$

den Gasdruck in den Poren beeinflusst. Aufgrund der Annahme einer ideal-inkompressiblen Elastomermatrix, gilt $|\Omega_M| = |\Omega_{M,0}|$, womit sich zeigen lässt, dass das Verhältnis

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_P|} &= \frac{4/3 \pi b_z b_r^2}{J^{4/3} \pi a_z a_r^2 - 4/3 \pi (a_z a_r^2 - b_z b_r^2)} \\ &= 1 + \frac{b_z b_r^2}{a_z a_r^2} \left(\frac{1}{J} - 1 \right) \end{aligned} \quad 4.78$$

lediglich von der initialen RVE-Geometrie und dem makroskopischen Volumenverhältnis J abhängt. Mit der Beziehung $p_{rel} = -\partial \rho_0 \psi_{gas} / \partial J$ kann der Gasdruck auch als ein zusätzlicher

hyperelastischer Beitrag zum Gesamtpotential 4.7 interpretiert werden. Integrieren von p_{rel} mit der Randbedingung $\rho_0 \psi_{gas}(J = 1) = 0$ führt schließlich auf die Verzerrungsenergiedichte

$$\rho_0 \psi_{gas} = p_{abs,0} \left(\frac{b_z b_r^2}{a_z a_r^2} (J - \ln(J)) - \frac{b_z b_r^2}{a_z a_r^2} \right). \quad 4.79$$

Da das Potential lediglich von J abhängt, wird das Modellverhalten nicht vom Gasdruck beeinträchtigt, wenn makroskopisch keine volumetrische Deformation vorliegt.

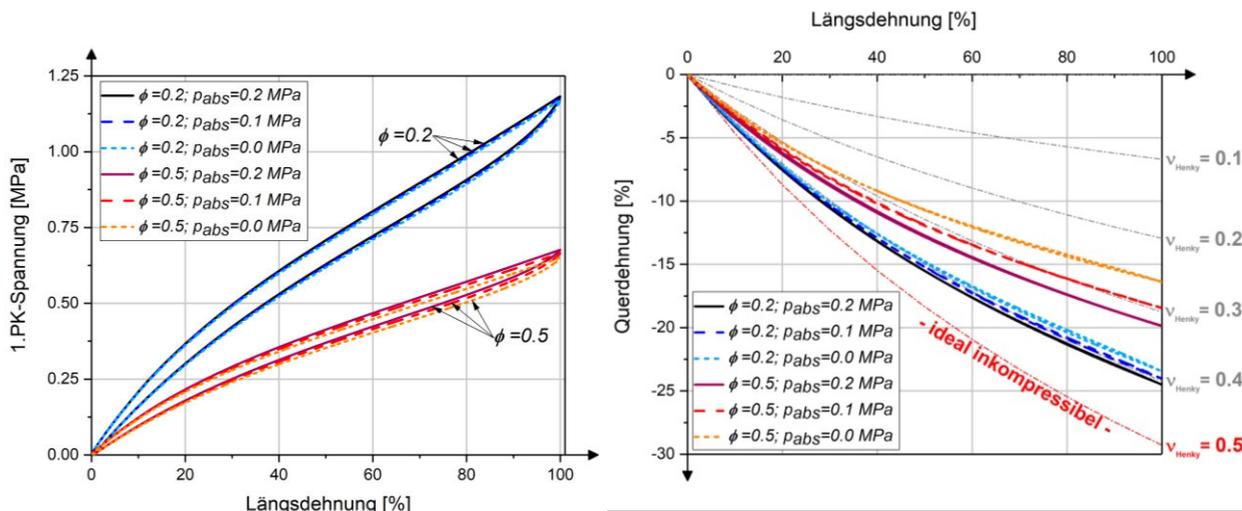


Abbildung 4.52: 1.PK-Spannung (li.) und Querdehnung (re.) bei uniaxialem Zug für das Hohlkugel-RVE bei variierendem, initialen absoluten Gasdruck $p_{abs,0}$; Parametersatz von Material „DIK-3“; $\dot{\epsilon}_A = 3 \text{ \%}/s$

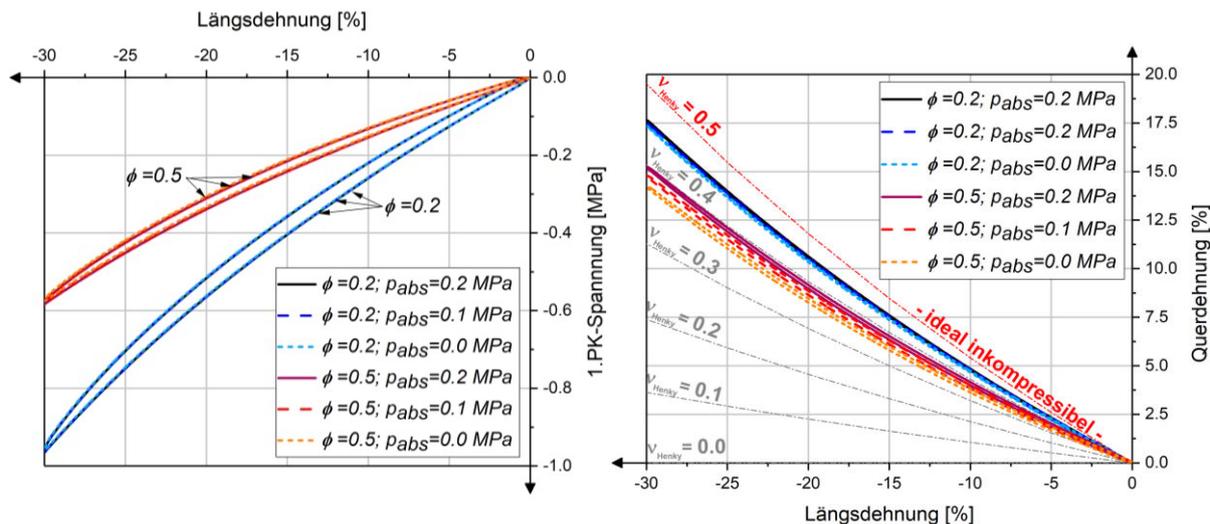


Abbildung 4.53: 1.PK-Spannung (li.) und Querdehnung (re.) bei uniaxialem Druck für das Hohlkugel-RVE bei variierendem initialen absoluten Gasdruck $p_{abs,0}$; Parametersatz von Material „DIK-3“; $\dot{\epsilon}_A = 3 \text{ \%}/s$

Wie sich durch Anwendung des Teilmodells für den Gasdruck das Gesamtmodellverhalten verändert, ist in Abbildung 4.52 für uniaxialen Zug und in Abbildung 4.53 für uniaxialen Druck dargestellt. Dem Autor ist kein Verfahren zur experimentellen Bestimmung des initialen absoluten Gasdrucks in den Poren $p_{abs,0}$ bekannt. Aufgrund dessen wurde dieser geschätzt, wobei

angenommen wird, dass dieser bei den meisten Schäumen zwischen dem einfachen ($p_{abs,0} = 0,1 \text{ MPa}$) und doppelten ($p_{abs,0} = 0,2 \text{ MPa}$) atmosphärischen Druck liegt. Für diese beiden Werte hat der Gasdruck jedoch nur einen geringfügig versteifenden Einfluss, wobei dieser Effekt beim höheren Porenvolumenanteil ($\phi = 0,5$) etwas stärker ist. Aufgrund der Modellierung als zusätzlicher volumetrischer Beitrag in der Verzerrungsenergiedichte ändert sich nämlich lediglich das volumetrische Verhalten, welches sich vor allem bei der Betrachtung des Querdehnverhaltens zeigt. Es ist ersichtlich, dass das Modell durch den Gasdruck volumetrisch versteift wird, da die Hencky-Querdehnzahl mit zunehmendem initialem Gasdruck $p_{abs,0}$ ansteigt. Beim größeren Porenvolumenanteil ($\phi = 0,5$) ist der Effekt hierbei ausgeprägter als beim niedrigen Porenvolumenanteil ($\phi = 0,2$).

4.5.3.4 Integration über das Matrixgebiet des RVE

Wie bereits in Abschnitt 4.6 herausgestellt wurde, kann die Integration der lokalen Verzerrungsenergiedichte über das Matrixvolumen in Referenzkonfiguration

$$I_g = \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}) dV \quad 4.80$$

nur bei sehr einfachen Potentialen analytisch erfolgen. Da dies auch beim vorliegenden Potential nicht möglich ist, wird hier für die Bestimmung von I_g ein numerisches Integrationsverfahren genutzt.

Um über das Matrixvolumen des Fokaloids zu integrieren, wird zunächst ein neues Koordinatensystem eingeführt, welches auf der Koordinate ξ und der Oberfläche einer Einheitskugel $\mathbf{n}^E(\alpha, \beta)$ mit den Koordinaten α und β basiert. Mit der Transformationsvorschrift

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \mathbf{M}(\xi, a_z, a_r, b_z, b_r) \cdot \mathbf{n}^E(\alpha, \beta) \quad 4.81$$

$$\text{mit } \mathbf{n}^E(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} (a_r - b_r)\xi + b_r & & \\ & (a_r - b_r)\xi + b_r & \\ & & (a_z - b_z)\xi + b_z \end{pmatrix}$$

können die (ξ, α, β) Koordinaten ins $\hat{\mathbf{X}}$ -Koordinatensystem überführt werden. Da die Außenfläche des RVE bei $\xi = 1$ und die Innenfläche bei $\xi = 0$ liegt, kann das Integrationsgebiet mit folgenden Grenzen beschrieben werden:

$$\Omega_{M,0} = \{(\xi, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \xi < 1, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < 2\pi\}. \quad 4.82$$

Durch das Aufteilen in einen ξ -Anteil und einen sphärischen (α, β) -Anteil ist das Integral

$$I_g = \int_0^1 \int_S \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\mathbf{n}^E, \xi) |g(\mathbf{n}^E(\alpha, \beta), \xi)| dS d\xi \quad \text{mit } dS = \sin(\alpha) d\alpha d\beta \quad 4.83$$

bei der numerischen Integration einfacher handhabbar. Die Jacobi-Determinante $|g(\mathbf{n}^E(\alpha, \beta), \xi)|$ ergibt sich unter der Annahme einer Ausrichtung des Fokaloids in z-Richtung mit $\mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{I}$ zu:

$$|g(\mathbf{n}^E(\alpha, \beta), \xi)| = |-(a_r - b_r)(b_r + a_r\xi - b_r\xi)(b_z + a_z\xi - b_z\xi)((n_1^E)^2 + (n_2^E)^2) - (a_z - b_z)(b_z(\xi - 1) - a_r\xi)^2(n_3^E)^2|. \quad 4.84$$

Ist $\mathbf{R}_p(\zeta_1, \zeta_2) \neq \mathbf{I}$, kann die Jacobi-Determinante mit der Beziehung $|g(\mathbf{n}^E, \xi)| = |\partial \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{n}^E, \xi) / \partial \xi|$ hergeleitet werden. Wird eine Gauß-Legendre Quadratur für den ξ -Anteil und Lebedev Quadratur für den sphärischen \mathbf{n}^E -Anteil verwendet, ergibt sich schließlich das durch numerische Integration approximierte Integral

$$I_g \approx \sum_j^{n_\xi} \sum_i^{n_n} 4\pi |g(\mathbf{n}_{(i)}^E, \xi_{(j)})| \hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\mathbf{n}_{(i)}^E, \xi_{(j)}) \mathbf{w}_{(i)} \mathbf{w}_{(j)} . \quad 4.85$$

Für den Fall der Hohlkugel wurde bereits in [15] gezeigt, dass der sphärische Anteil mit 26 Stützstellen ausreichend genau integriert werden kann. Die Ergebnisse einer entsprechenden Untersuchung zum Einfluss der Anzahl der Stützpunkte in ξ -Richtung ist Kapitel 4.6.3.7 zu entnehmen.

4.5.3.5 Überlegungen zur thermodynamischen Konsistenz des Multiskalenmodells

In Kapitel 4.5.2 wurde bereits gezeigt, dass das Materialmodell der Elastomermatrix thermodynamisch konsistent ist und somit stets die Clausius-Duhem-Ungleichung 4.20 auf der Mikroebene erfüllt. Ob dies jedoch auch auf makroskopischer Größenskala zu einer positiven Dissipationsrate führt, hängt zusätzlich sowohl von der Wahl der Randbedingung auf der Oberfläche des RVE's, des mikroskopischen Randwertproblems, als auch vom Homogenisierungsansatz ab.

Im Rahmen der sehr verbreiteten numerischen Homogenisierungsverfahren (wie beispielsweise der FE^2 -Methode) wird hierfür zumeist das sogenannte Hill-Mandel-Kriterium herangezogen. Dies besagt, dass bei der Verwendung von bestimmten Randbedingungen (periodische Randbedingungen, lineare Randverschiebungen oder -spannungen) und eines bestimmten Homogenisierungsansatzes (1.PK bei großen Deformationen) die makroskopische Spannungsleistung $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ dem Volumenmittel der mikroskopischen Spannungsleistung $\hat{\mathbf{P}} : \hat{\dot{\mathbf{F}}}$ entspricht. Ein Nachweis der Erfüllung der Dissipationsungleichung auf der Makroebene ist hiermit jedoch nur möglich, wenn ein nicht-dissipatives Materialmodell auf der Mikroebene verwendet wird. Sobald Dissipation auftritt, muss das Multiskalenmodell nach [36] zusätzliche Nebenbedingungen erfüllen. Dies wird aber zumeist vernachlässigt, weswegen ein Nachweis der makroskopischen, thermodynamischen Konsistenz beim Großteil der bestehenden Multiskalenmodelle nicht möglich ist.

Ausgangspunkt für eine Betrachtung der thermodynamischen Konsistenz beim vorliegenden Modell sind die Clausius-Duhem-Ungleichungen für isotherme Prozesse

$$\underbrace{\hat{\mathbf{P}} : \hat{\dot{\mathbf{F}}} - \hat{\rho}_0 \hat{\dot{\psi}}}_{\hat{D}} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{P}} = \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\mathbf{F}}} + \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{F}}^{-T} \quad 4.86$$

$$\underbrace{\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \dot{\psi}}_D \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad 4.87$$

auf beiden Größenskalen.

Aus dem Homogenisierungsansatz 4.43 folgt die Zeitableitung der makroskopischen Verzerrungsenergiedichte

$$\rho_0 \dot{\psi} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\psi} dV \Rightarrow \rho_0 \dot{\psi} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\dot{\psi}} dV, \quad 4.88$$

wobei angenommen wird, dass die mikroskopische Verzerrungsenergiedichte

$$\hat{\rho}_0 \hat{\psi}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{F}(t)), \hat{\Gamma}_i(\hat{\mathbf{X}}, t)) \quad 4.89$$

von einer beliebigen Anzahl von skalaren zeitabhängigen Statusvariablen $\hat{\Gamma}_i(\hat{\mathbf{X}}, t)$ abhängt. Beim vorliegenden Materialmodell für die Elastomermatrix entspricht beispielsweise die Statusvariable $\hat{\Gamma}_1(\hat{\mathbf{X}}, t) = x_{max}(\hat{\mathbf{X}}, t)$. Die Zeitableitung der mikroskopischen Verzerrungsenergiedichte führt mit der Kettenregel auf:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \underbrace{\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right)}_{\hat{\rho}_0 \hat{\dot{\psi}}} dV. \quad 4.90$$

Da $\partial \mathbf{F} / \partial t$ nicht von der Position $\hat{\mathbf{X}}$ abhängt, kann dieser Faktor aus dem Integral über das Matrixvolumen herausgezogen werden:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} dV : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) dV. \quad 4.91$$

Die Integration und Differentiation dürfen hierbei vertauscht werden, da $\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi} / \partial \mathbf{F}$ eine stetige Funktion und $\Omega_{M,0}$ eine kompakte Menge ist:

$$\rho_0 \dot{\psi} = \left(\frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \hat{\psi} dV \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) dV \quad 4.92$$

$$\rho_0 \dot{\psi} = \underbrace{\frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}}_{\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}} + \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) dV.$$

Einsetzen von 4.92 in 4.87 führt schließlich auf die makroskopische Dissipationsrate

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \dot{\psi} & 4.93 \\ &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) dV \\ &= - \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \hat{\Gamma}_i} \frac{\partial \hat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) dV. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der mikroskopischen Dissipationsrate $\widehat{\mathcal{D}}$ wird zunächst wieder die zeitliche Ableitung der Verzerrungsenergiedichte

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_0 \dot{\psi}(\widehat{\mathbf{X}}, \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}(t)), \widehat{\Gamma}_i(\widehat{\mathbf{X}}, t)) &= \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} : \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) \\
&= (\widehat{\mathbf{P}} - \hat{p} \widehat{\mathbf{F}}^{-T}) : \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) \\
&= \widehat{\mathbf{P}} : \dot{\widehat{\mathbf{F}}} + \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

gebildet. Dies führt schließlich auf die lokale Dissipationsrate

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}} &= \widehat{\mathbf{P}} : \dot{\widehat{\mathbf{F}}} - \hat{\rho}_0 \dot{\psi} \\
&= \widehat{\mathbf{P}} : \dot{\widehat{\mathbf{F}}} - \widehat{\mathbf{P}} : \dot{\widehat{\mathbf{F}}} - \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right) \\
&= - \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Das Einsetzen der Ausdrücke für die lokale und globale Dissipationsrate in 4.86, 4.87 und 4.88 ergibt nach einigen Umformungen die Zusammenhänge

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \widehat{\mathbf{P}} : \dot{\widehat{\mathbf{F}}} dV \tag{4.96}$$

$$\rho_0 \dot{\psi} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \hat{\rho}_0 \dot{\psi} dV \tag{4.97}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \int_{\Omega_{M,0}} \widehat{\mathcal{D}} dV \quad \text{mit } \widehat{\mathcal{D}} = - \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\partial \hat{\rho}_0 \hat{\psi}}{\partial \widehat{\Gamma}_i} \frac{\partial \widehat{\Gamma}_i}{\partial t} \right). \tag{4.98}$$

zwischen den Größen der Mikro- und Makroskala. Sowohl die makroskopische Spannungsleistung, als auch die Rate der Verzerrungsenergiedichte und die Dissipationsrate entsprechen somit dem Volumenmittel ihres mikroskopischen Gegenstücks. Dies bedeutet, dass falls für die Mikroebene ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell ($\widehat{\mathcal{D}} > 0$) gewählt wird, ebenfalls thermodynamisch konsistentes Verhalten ($\mathcal{D} > 0$) auf der Makroebene gewährleistet ist. Es sei angemerkt, dass der hier vorgestellte Nachweis nur für skalare Statusvariablen gilt und ein Beweis für tensorielle Statusvariablen wie dem inelastischen rechten Cauchy-Tensor $\widehat{\mathbf{c}}_{in}$ vom viskoelastischen Teilmodell noch aussteht.

4.5.3.6 Implementierung des Modells

Das Materialmodell wurde für die FE-Solver *MSC Marc* und *Simulia ABAQUS* als Subroutine implementiert. Eine Übersicht zu den verwendeten Schnittstellen ist in Tabelle 4.14 gegeben.

	implizit	explizit
MSC Marc	<i>hypela2</i>	<i>nicht implementiert</i>
Simulia Abaqus	<i>UMAT</i>	<i>VUMAT</i>

Tabelle 4.14: Verwendete Schnittstellen in *MSC Marc* und *Simulia Abaqus* für die Implementierung des Materialmodells

Die von den einzelnen Subroutinen unterstützten Elementtypen sind in Tabelle 4.15 aufgeführt.

	3D	2D
<i>hypela2</i>	7, 21, 107, 108, 127, 134, 136, 202, 216, 218	6, 11, 27, 91, 93, 125
UMAT	C3D4, C3D6, C3D8, C3D8R, C3D10, C3D15, C3D20, C3D20R	CPE6, CPE8, CPE8R
VUMAT	C3D4, C3D6, C3D8, C3D8R, C3D10, C3D15, C3D20, C3D20R	CPE6, CPE8, CPE8R

Tabelle 4.15: Elementtypen, die von den Subroutinen unterstützt werden

4.5.3.7 Untersuchung zu numerischen Parametern

Um das Verhältnis aus Rechenzeit und -genauigkeit zu optimieren, wurde das implementierte Modell eingehend bezüglich des Einflusses der numerischen Parameter untersucht.

Hierzu wurde die Modellantwort bei einer variierenden Anzahl von radialen Integrationspunkten (für die radiale Gauß-Legendre Quadratur) und einer variierenden Anzahl von Reihengliedern k zur Approximation der polstellenfreien Verzerrungsenergie dichte aufgenommen. Es wurde der für die Numerik kritischste Fall, nämlich makroskopisch hydrostatischer Druck, untersucht. Dies ist bezüglich des Parameters k kritisch, da hierbei an der Innenfläche der Hohlkugel extrem große Deformationen auftreten. Darüber hinaus weist die zu integrierende lokale freie Energie in radiale Richtung einen sehr inhomogenen Verlauf auf, welches für die Approximation des Integrals mittels numerischer Integration einen kritischen Extremfall darstellt. Es sei angemerkt, dass das Modell beim untersuchten Fall – eine volumetrische Druckdeformation mit $J = (0,7)^3$ und einem Porenvolumenanteil von 80% – aufgrund von vernachlässigten Beuleffekten etc. kein realitätsnahes Verhalten zeigen kann. Das Auffinden von geeigneten numerischen Parametern für den betrachteten Extremfall soll lediglich gewährleisten, dass der numerische Fehler auch bei allen anderen möglichen Konfigurationen ausreichend klein bleibt. Die Ergebnisse der Untersuchung sind Abbildung 4.54 zu entnehmen, wobei neben der Spannung (li.) die Laufzeit der Simulation (re.) gemessen wurde.

Es ist ersichtlich, dass sich die Modellantwort ab einer Anzahl von fünf radialen Integrationspunkten nicht mehr wesentlich ändert, weswegen für die im Projekt durchgeführten Simulation $n_{\xi} = 5$ gewählt wurde. Zudem sollten bei der Reihenentwicklung für einen vernachlässigbar kleinen numerischen Fehler mindestens 3000 Glieder genutzt werden. Die

Laufzeit auf dem verwendeten Rechnersystem (Intel Xeon E5-2620) steigt linear mit der Anzahl der Integrationspunkte n_ξ und linear mit der Anzahl der Reihenglieder k .

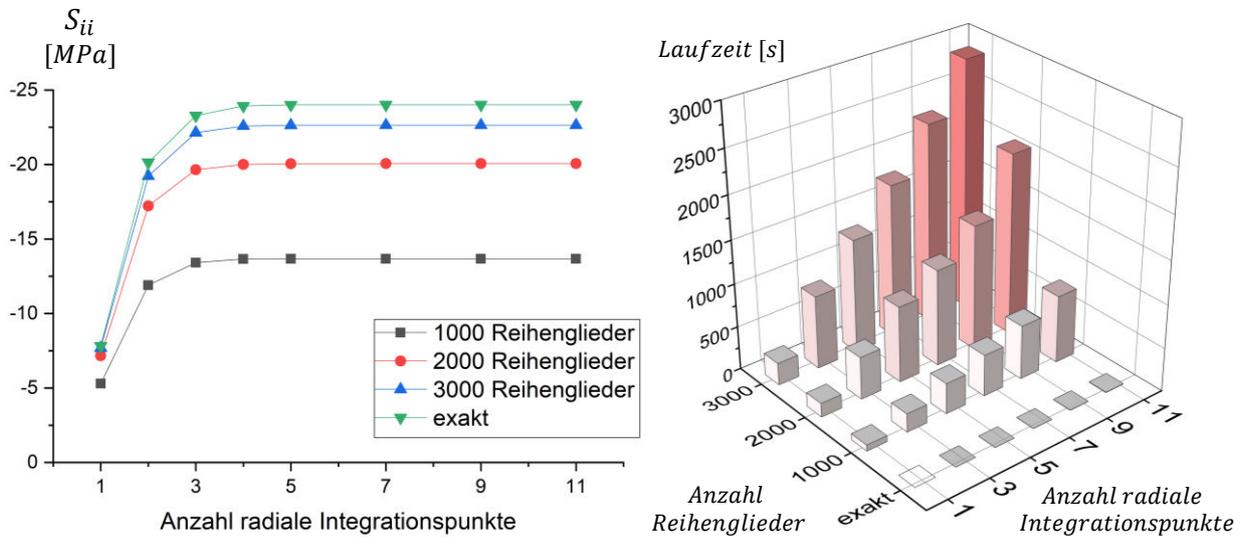


Abbildung 4.54: Konvergenzanalyse bezüglich der numerischen Parameter n_ξ und k (für $f_{sing,approx}$); hydrostatischer Druck mit $J = (0,7)^3$ bei einem Porenvolumenverhältnis von 80%; 2.PK-Spannung (li.); Laufzeit (re.); Parameter: $G_c = 0,01$; $G_f = 0,01$; $n = 13,3326$; $\chi = 2,75$; $e_b = 10$; $v_b = 0,1$; $\phi^{VE} = 0$ und statische X_{max} - Evolution

Bei einer volumetrischen Druckdeformation mit $J = (0, \bar{6})^3$ wird die Verzerrungsenergiegedichte bei einer vollständig analytischen Lösung des Problems am Innenrand der Hohlkugel unendlich groß, weswegen die resultierende Spannung für diesen Fall auch gegen unendlich strebt. Eine Erfassung dieses Verhaltens ist mit den verwendeten numerischen Verfahren, wie auch in Abbildung 4.55 aufgeführt, nicht mehr möglich.

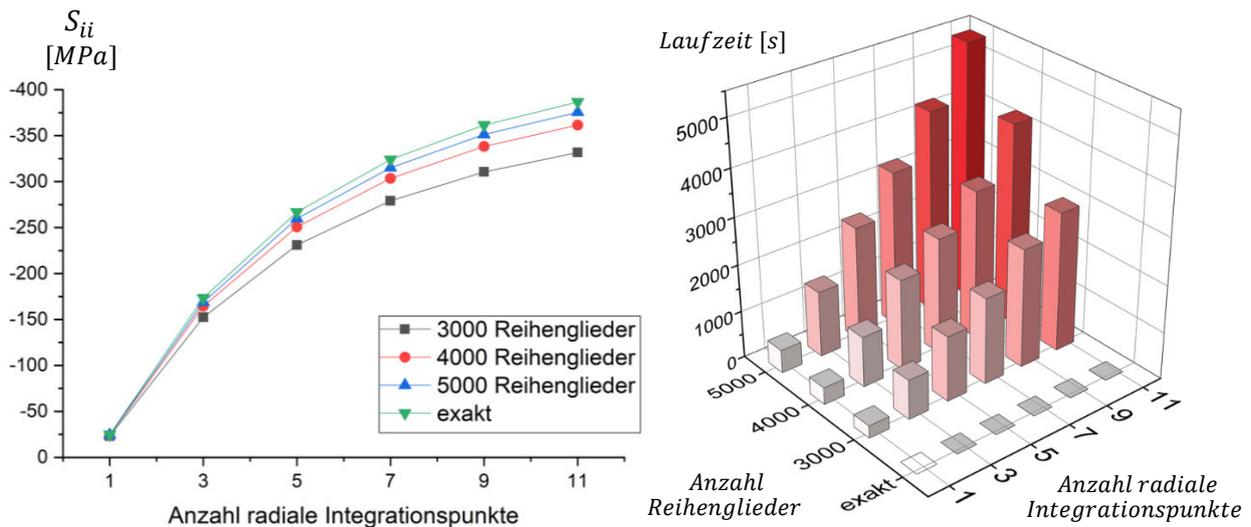


Abbildung 4.55: Konvergenzanalyse bezüglich der numerischen Parameter n_ξ und k (für $f_{sing,approx}$); hydrostatischer Druck mit $J = (0, \bar{6})^3$ bei einem Porenvolumenverhältnis von 80%; 2.PK-Spannung (li.); Laufzeit (re.); Parameter: $G_c = 0,01$; $G_f = 0,01$; $n = 13,3326$; $\chi = 2,75$; $e_b = 10$; $v_b = 0,1$; $\phi^{VE} = 0$ und statische X_{max} - Evolution

4.5.3.8 Modellierungsfehler und Grenzen des Modells

Aufgrund der bei der Modellbildung getroffenen Annahmen kann das Einsatzgebiet des Modells a priori auf bestimmte Deformationszustände und Schaumstrukturen eingeschränkt werden. Die wesentlichste Annahme, nämlich die Modellierung der Mikrostruktur des Schaums mit der CSA beschränkt die Anwendbarkeit streng genommen auf Schäume mit eben dieser Schaumstruktur. Um zu gewährleisten, dass der zu simulierende Schaum eine zumindest ähnliche Struktur wie die CSA aufweist, sollte vor der Verwendung des Modells sichergestellt sein, dass eine geschlossenenporige und möglichst isotrope Mikrostruktur vorliegt.

Bezüglich des Deformationszustands ist das vorliegende Modell auf den Zug- und den moderaten Druckbereich beschränkt. Bei großen Druckdeformationen treten auf der Mikroebene nämlich Beulphänomene auf, welche mit dem vorliegenden Modellierungsansatz nicht abgebildet werden können. Diese geometrisch nichtlinearen Effekte bewirken auf der Makroebene üblicherweise eine Abnahme der Steifigkeit. Bei extrem großen Druckdeformation kann es zudem zum Selbstkontakt der Porenwände kommen, welcher beim Modell, wie auch in Abbildung 4.56 ersichtlich, genau bei $\phi = 1 - J$ auftritt. Während bei experimentellen Untersuchungen ein schlagartiger Anstieg der Steifigkeit zum Zeitpunkt des Selbstkontakts zu beobachten ist, wird die Steifigkeit an diesem Punkt bei einer Simulation mit dem vorliegenden Modell unendlich groß. Somit können Zustände bei $\phi < 1 - J$, also einer zusätzlichen volumetrischen Druckdeformation bei bereits vorliegendem Selbstkontakt, vom Modell ebenfalls nicht abgebildet werden.

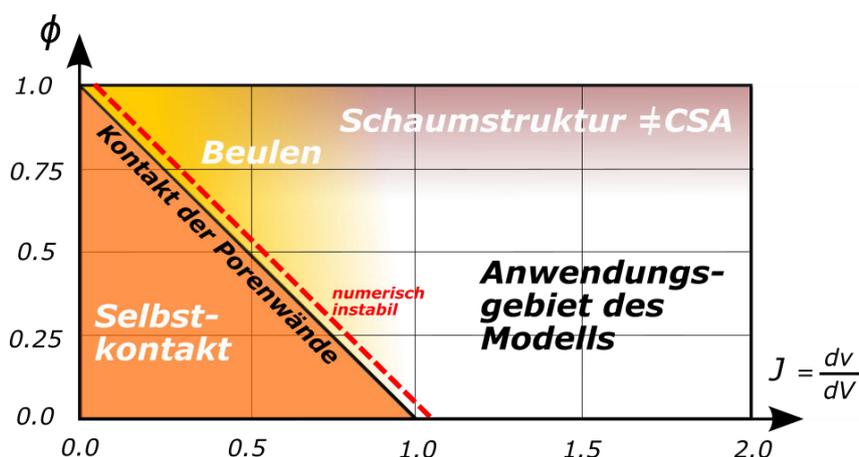


Abbildung 4.56: Schematische Übersicht zum Anwendungsgebiet des Modells

Ein weiterer wesentlicher Aspekt der Modellierung besteht in der Wahl eines geeigneten Übergangs von der Makro- zur Mikrostruktur, welcher beim vorliegenden Modell mit linearen Randverschiebungen auf der RVE-Oberfläche realisiert wurde. Dies stellt eine sehr starke Zwangsbedingung dar, welche zu tendenziell zu steifem makroskopischen Materialverhalten führt. Die Verwendung von periodischen Randbedingungen, die bei einem kugelförmigen RVE-Rand jedoch nicht klar definiert sind, sollten die realitätsnahesten Simulationsergebnisse erbringen. Der theoretische Hintergrund für diesen Zusammenhang ist für die Theorie großer Deformationen [37] zu entnehmen.

Im Gegensatz dazu hat die Verwendung eines ideal-inkompressiblen lokalen Verschiebungsfelds als Näherungslösung (anstelle einer erfüllten Gleichgewichtsbedingung mit einem nahezu-inkompressiblen Material), wie bereits in Kapitel 4.2.2 herausgestellt, lediglich eine geringfügig steifere Modellantwort zur Folge. Eine Übersicht zu den getroffenen Annahmen und die zu

erwartende resultierende Abweichung zum realen Materialverhalten sind zudem Tabelle 4.16 aufgeführt.

	Annahme	Abweichung (vgl. zu Realität)	Realitätsnähere Modellierung
Schaumstruktur	<i>Composite Spherical Assemblage</i> <i>Composite Spheroid Assemblage</i>	<i>abhängig von der Mikrostruktur des Schaums</i>	<i>RVE mit feinerer Auflösung der Schaumgeometrie</i>
Elastomermatrix	<i>ideal-inkompressibel</i>	<i>tendenziell zu steifes Verhalten</i>	<i>Gleichgewichtsbedingung auf der Mikroebene</i> <i>Nahezu-Inkompressibilität</i>
Randbedingung	$\hat{\chi} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{X}}$ <i>auf Rand der CSA/Hohlkugel</i>	<i>tendenziell zu steifes Verhalten</i>	<i>Periodische Randbedingung auf Rand der CSA</i>
Porenwandbeulen	<i>vernachlässigt</i>	<i>wesentlich zu steif im Druckbereich</i>	<i>Modellierung des Beulens</i>
Selbstkontakt	<i>vernachlässigt</i>	<i>Materialsteifigkeit wird unendlich groß</i>	<i>Modellierung des Selbstkontakts</i>

Tabelle 4.16: Bei der Modellierung getroffenen Annahmen und ihre Auswirkungen

4.5.4 Parameteridentifikation

4.5.4.1 Identifikation der Matrixmaterialkennwerte

Das mechanische Verhalten der elastomeren Matrix wird mit den Matrixmaterialkennwerten \mathbf{q} beschrieben. Um diese zu bestimmen, wird die Summe der quadrierten (absoluten) Abweichung zwischen Experiment und Modell für n_{Ziel} Zielgrößen $f_{(i,j)}$ minimiert. Da die Zielgrößen im Experiment und in der Simulation üblicherweise nicht in kontinuierlicher Form vorliegen, findet die Auswertung an $n_{Stütz}$ diskreten Stützstellen mit

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n_{Ziel}} \sum_{j=1}^{n_{Stütz}} w_i \left(f_{(i,j)}^{sim}(\mathbf{q}) - f_{(i,j)}^{exp} \right)^2}_{s(\mathbf{q})} \rightarrow \min \quad 4.99$$

statt, wobei mit Vorfaktor w_i die einzelnen Zielgrößen unterschiedlich stark gewichtet werden können. Ein wesentlicher Vorteil bei der Anwendung des im Projekt entwickelten Modells, besteht in der Tatsache, dass das Materialverhalten der Elastomermatrix und der Einfluss der Mikrostruktur voneinander entkoppelt beschrieben werden. Dies ermöglicht eine isolierte Identifikation der Matrixmaterialkennwerte \mathbf{q} und eine spätere Adaption auf verschiedene Porenstrukturen durch Anpassung der Mikrostrukturkennwerte \mathbf{p} . Somit entfällt eine aufwändige mechanische Charakterisierung einer jeden Schaumstruktur, falls ein geschäumtes Bauteil mit variabler Mikrostruktur simuliert werden soll. Es sei jedoch angemerkt, dass bei einer Parameteridentifikation mit dem porenfreien Material sichergestellt sein muss, dass dieses möglichst ähnlich zum Matrixmaterial des Schaums ist.

Mit den Matrixmaterialproben der im Projekt untersuchten Schäume wurden Zugversuche unter uniaxialer, planarer und äquibiaxialer Belastung durchgeführt, wobei jeweils die erste Piola-Kirchhoff-Spannung

$$\begin{aligned}
 f_{(1,j)}^{sim} &= P_j^{sim,uniaxial} & \text{bzw.} & & f_{(1,j)}^{exp} &= P_j^{exp,uniaxial} \\
 f_{(2,j)}^{sim} &= P_j^{sim,planar} & \text{bzw.} & & f_{(2,j)}^{exp} &= P_j^{exp,planar} \\
 f_{(3,j)}^{sim} &= P_j^{sim,\text{äquibiax}} & \text{bzw.} & & f_{(3,j)}^{exp} &= P_j^{exp,\text{äquibiax}}
 \end{aligned}
 \tag{4.100}$$

als Zielgröße verwendet wurde. Je nachdem, ob das Verhalten bei großen oder kleinen Deformationen stärker gewichtet werden soll, kann hier wahlweise auch die zweite Piola-Kirchhoff- oder die Cauchy-Spannung verwendet werden.

Wie stark ein Mode gewichtet werden sollte, hängt von den in der Elastomermatrix des geschäumten Bauteils vorkommenden Deformationszuständen ab. Welche Zustände bei makroskopisch volumetrischer und isochorer Deformation an den Integrationspunkten im RVE auftreten, ist den Invariantendiagrammen in Abbildung 4.57 und Abbildung 4.58 zu entnehmen. Demnach treten bei makroskopisch hydrostatischem Zug im gesamten RVE nur rein äquibiaxiale Zustände und bei makroskopisch hydrostatischem Druck nur rein uniaxiale Deformationszustände auf.

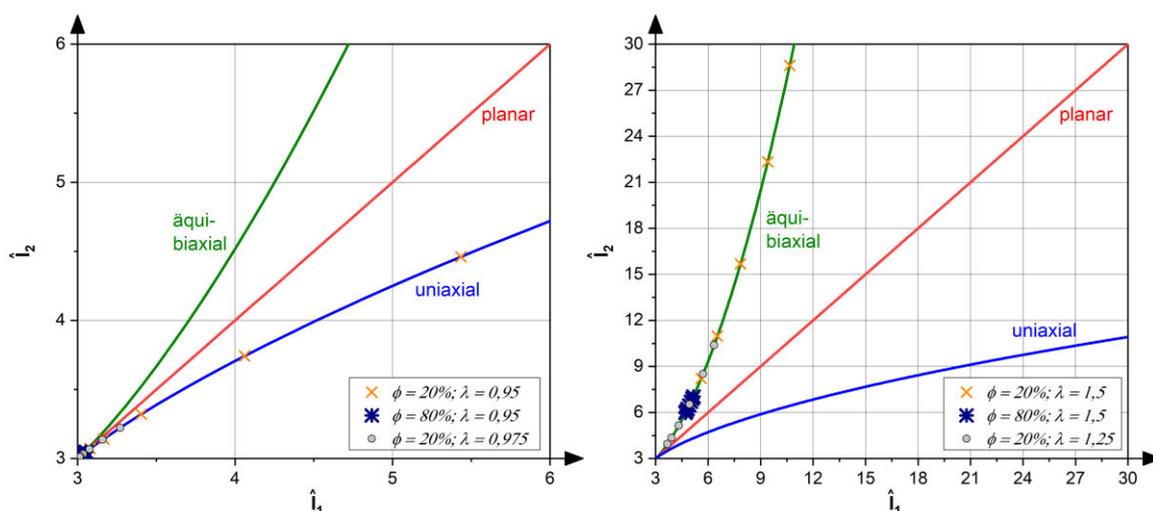


Abbildung 4.57: Invarianten (mikroskopisch) bei makroskopisch hydrostatischem Druck (li.) und makroskopisch hydrostatischem Zug (re.) - ausgewertet an den Integrationspunkten der Hohlkugel ($n_n = 26, n_\xi = 7$)

Mit absinkendem Porenvolumenanteil im RVE werden die lokalen Zustände zunehmend inhomogener, wobei die Deformationen lokal extrem groß werden können. Während beispielsweise die lokalen ersten Invarianten bei makroskopisch hydrostatischem Zug mit $\lambda = 1,5$ und einer Porosität von $\phi = 0,8$ im Wertebereich $[4,71; 5,16]$ liegen, ergibt sich bei $\phi = 0,2$ ein Intervall $[4,76; 10,67]$. Eine detaillierte Betrachtung der mikroskopischen Eigenvektoren von \hat{U} ergab zudem, dass an allen Punkten des RVE ein Eigenvektor in Richtung des Hohlkugelmittelpunkts ausgerichtet ist und die zwei verbleibenden Eigenvektoren (mit einer identischer zugehörigen Hauptstreckung) eine Ebene orthogonal hierzu bilden.

Wie bereits in Kapitel 4.5.3.1 herausgestellt, entspricht der lokale Deformationszustand im gesamten RVE dem globalen Deformationszustand, wenn die makroskopische Deformation rein

isochor ist. Aufgrund dessen ergeben sich bei einem Zustand der makroskopischen einfachen Scherung an allen mikroskopischen Integrationspunkten identische (\hat{I}_1, \hat{I}_2) -Wertepaare.

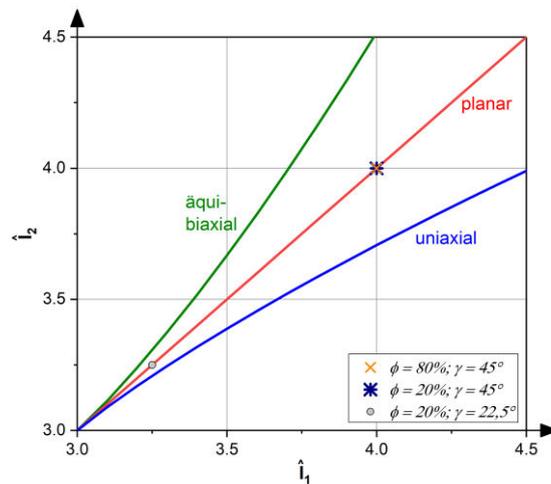


Abbildung 4.58: Invarianten (mikroskopisch) bei makroskopischer einfacher Scherung - ausgewertet an den Integrationspunkten der Hohlkugel ($n_n = 26, n_\xi = 7$)

Grundsätzlich ergeben sich aus der vorgenommenen Untersuchung drei Empfehlungen für die Parameteridentifikation am Vollmaterial:

1. Unterliegt der Schaum großen volumetrischen Druckdeformationen, sollten insbesondere Daten aus uniaxialen Zugversuchen für die Parameteridentifikation genutzt (bzw. stärker gewichtet) werden.
2. Unterliegt der Schaum großen volumetrischen Zugdeformationen, sollten insbesondere Daten aus uniaxialen Druck- und/oder äquibiaxialen Zugversuchen für die Parameteridentifikation genutzt (bzw. stärker gewichtet) werden.
3. Mit abnehmenden Porenvolumenanteil und zunehmendem Grad volumetrischer Deformation wird der mikroskopische Deformationszustand zunehmend inhomogener, wobei es lokal im Vergleich zur makroskopischen Ebene zu teilweise sehr großen Deformationen kommt. Aufgrund dessen sollte hier ein sehr großes Spektrum von Dehnungen und Dehnraten in der Lastsequenz des Versuchs vorkommen.

Da die experimentelle Validierung des im Projekt entwickelten Modells größtenteils auf Basis von uniaxialen Zug- und Druckversuchen vorgenommen wurde, soll ebenfalls dieser Fall betrachtet werden. Abbildung 4.59 ist zu entnehmen, dass die (\hat{I}_1, \hat{I}_2) -Wertepaare im Invariantendiagramm unter makroskopisch uniaxialer Druckbelastung bei den untersuchten $\lambda - \phi$ -Kombinationen zwischen der äquibiaxialen und planaren Kurve liegen; bei makroskopisch uniaxialem Zug zwischen der planaren und uniaxialen Kurve. Aufgrund dessen wurde auf die sehr arbeitsaufwändige Durchführung von biaxialen Zugversuchen verzichtet, wenn das Modell für die Simulation eines uniaxialen Zugversuchs an einer geschäumten Probe verwendet wurde.

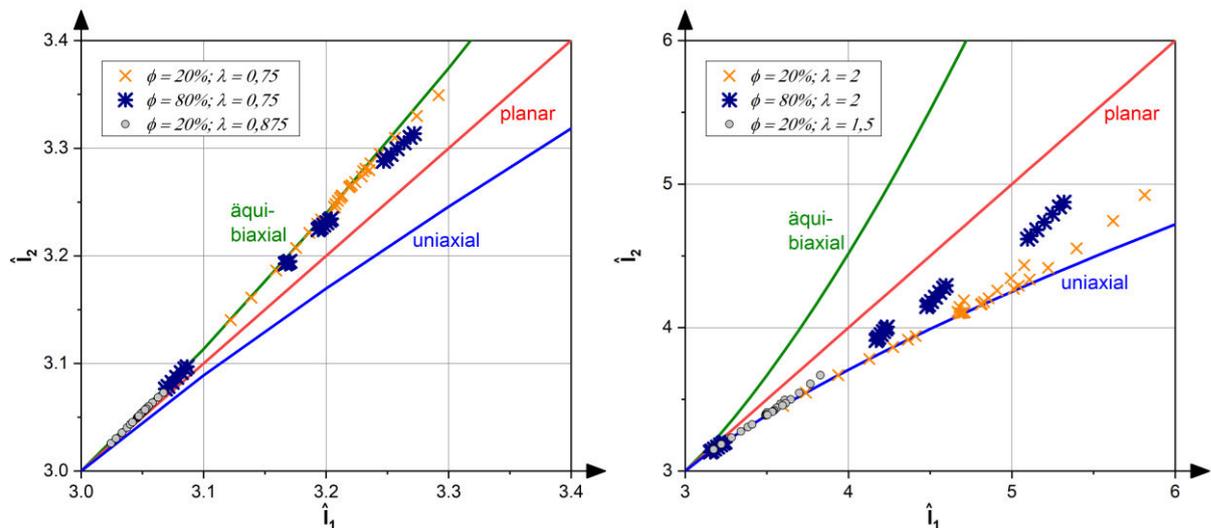


Abbildung 4.59: Invarianten (mikroskopisch) bei makroskopisch uniaxialem Druck (li.) und makroskopisch uniaxialem Zug (re.) - ausgewertet an den Integrationspunkten der Hohlkugel ($n_n = 26, n_\xi = 7$)

Falls keine Prüfkörper aus dem porenfreien Matrixmaterial zur Verfügung stehen, muss die Identifikation direkt an den geschäumten Proben vorgenommen werden.

Bei geschäumten Proben eignet sich unter den am DIK zur Verfügung stehenden Prüfmaschinen lediglich der uniaxiale Zugversuch:

$$f_{(1,j)}^{sim} = P_j^{sim,uniaxial} \quad \text{bzw.} \quad f_{(1,j)}^{exp} = P_j^{sim,uniaxial} \quad . \quad 4.101$$

Für die Berechnung der Modellantwort $P_j^{sim,uniaxial}$ muss jedoch ein FE-Solver genutzt werden, da die auftretenden Querdehnungen nicht mehr über die Annahme der idealen Inkompressibilität bestimmt werden können. Hierfür wurde im Rahmen des Projekts ein entsprechendes Python-Tool auf Basis der FE-Solver *MSC Marc* und *Simulia ABAQUS* implementiert. Die Funktionalität wurde an einem Schaum und einer Dichtung des Projektpartners *Schueco KG* nachgewiesen. Werden zusätzlich Querdehnungen λ_{lat} während des Versuchs aufgenommen, besteht zudem die Möglichkeit, das volumetrische Verhalten über Adaptierung des Gasdrucks $p_{abs,0}$ anzupassen. In diesem Fall, werden demnach die zwei Zielgrößen

$$\begin{aligned} f_{(1,j)}^{sim} &= P_j^{sim,uniaxial} & \text{bzw.} & \quad f_{(1,j)}^{exp} = P_j^{sim,uniaxial} \\ f_{(2,j)}^{sim} &= \lambda_{lat,j}^{sim,uniaxial} & \text{bzw.} & \quad f_{(2,j)}^{exp} = \lambda_{lat,j}^{sim,uniaxial} \end{aligned} \quad . \quad 4.102$$

minimiert.

4.5.4.2 Parameteridentifikation – Porenkennwerte

Die Identifikation der Porenkennwerte des Modells basiert auf der Idee einer bestmöglichen virtuellen Rekonstruktion der Mikrostruktur des Schaums zu einer Composite Spheroid Assemblage. Hierfür wird jeder Pore im CT-Bild ein Fokaloid zugewiesen, dessen Mittelpunkt dem geometrischen Zentrum der Pore entspricht. In einem zweiten Schritt wird das Porenvolumen im Fokaloid dem Volumen der zugehörigen Pore aus den CT-Daten gleichgesetzt.

Die Abmessungen und die Ausrichtung des Fokaloids lassen sich hierbei vollständig mit den Mikrostrukturkennwerten

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{|\Omega_{P,0}|}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{P,0}|} \\ c_A \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad 4.103$$

beschreiben. Im Folgenden wird eine Funktion

$$g_{VA}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \{-1,0,1\} \quad 4.104$$

zur Beschreibung der virtuellen Rekonstruktion definiert, welche den Wert 0 annimmt, falls sich an der Position \mathbf{X}^{CT} die Matrix genau eines Fokaloids befindet. Ein Wert von 1 wird zugewiesen, falls die Position \mathbf{X}^{CT} in der Pore genau eines Fokaloids liegt. Bei Mehrfachzuordnungen und in Bereichen, die weder der Matrix noch einer Pore eines Fokaloids zugeordnet werden können, entspricht $g_{VA}(\mathbf{X}^{CT}, \mathbf{p})$ dem Wert -1 . Um die Mikrostrukturkennwerte \mathbf{p} zu bestimmen, welche die größtmögliche Ähnlichkeit zwischen der virtuellen Rekonstruktion und dem CT-Bild ermöglichen, wird die Zielfunktion

$$t(\mathbf{p}) = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{X}^{CT}, \mathbf{p}) dV \quad 4.105$$

mit

$$f(\mathbf{X}^{CT}, \mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{iff } \left((g_{CT}(\mathbf{X}^{CT}) = 1) \wedge (g_{VA}(\mathbf{X}^{CT}, \mathbf{p}) = 1) \right) \\ & \vee \left((g_{CT}(\mathbf{X}^{CT}) = 0) \wedge (g_{VA}(\mathbf{X}^{CT}, \mathbf{p}) = 0) \right) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad 4.106$$

definiert. Das Maximieren der Zielfunktion $t(\mathbf{p}) \rightarrow \max$ mittels eines geeigneten Optimierers ergibt schließlich die Porenkennwerte \mathbf{p} des Modells. Eine graphische Darstellung des vorgestellten Algorithmus ist zudem in Abbildung 4.60 gegeben.

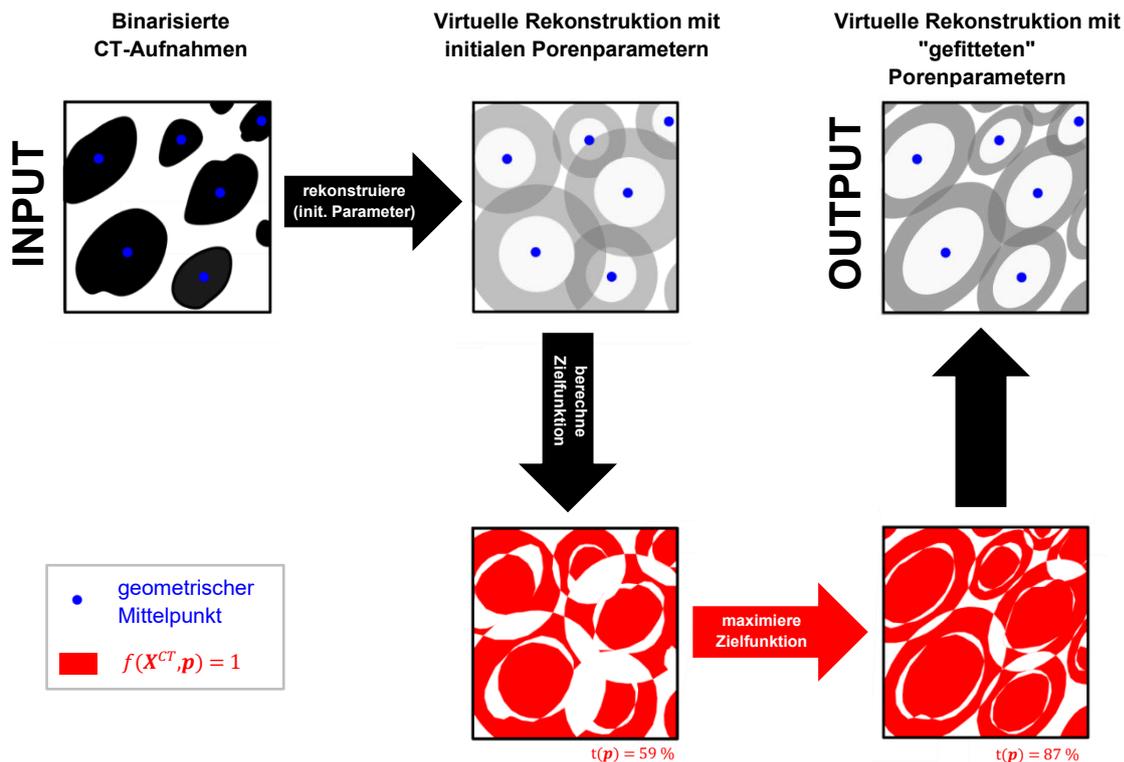


Abbildung 4.60: Schematische Darstellung des vorgestellten Algorithmus zur Identifikation der Mikrostrukturkennwerte

4.5.5 Modellvalidierung

4.5.5.1 Uniaxiale Zugversuche

Eine erste Validierung des Modells wurde mit den in AP 2 hergestellten DIK-Schäumen vorgenommen, welche aus den in Kapitel 4.1.1 vorgestellten Industriemischungen hergestellt wurden. Hierfür wurden Multihystereseversuche mit Relaxationsphasen unter uniaxialer Zugbelastung durchgeführt, wobei die auftretende Querdehnung durch Messung vor einem Hinterlichtschirm erfasst wurde. Die Auswertung wurde mit der internen Software der Zugmaschine (*testXpert III*) an 10 äquidistant verteilten Stellen zwischen den auf dem S2-Zugstab aufgetragenen Leuchtpunkten (für die Längsdehnungsmessung) durchgeführt. Des Weiteren wurden alle untersuchten Schäume im CT hinsichtlich ihrer Mikrostruktur charakterisiert. Es zeigt sich, dass lediglich Schaum I über eine sehr homogene Porenstruktur mit größtenteils geschlossenen und nahezu kugelförmigen Poren verfügt. Die überwiegend geschlossporige Schaumprobe II zeigte demgegenüber eine in den einzelnen Bereichen der Probe variierende Ausrichtung der Poren. Eine niedrige volumenbezogene Sphärizität ($S = 0,282$) bei Schaumprobe III weist auf eine im Gegensatz zu Probe I und II überwiegend offenporige Schaumstruktur hin. Die im Experiment aufgenommenen Daten werden in Abbildung 4.61 und Abbildung 4.62 der Modellantwort gegenübergestellt, wobei $c_A = 1$ gewählt wurde und das Porenvolumenverhältnis im RVE der makroskopischen Porosität des Schaums entspricht.

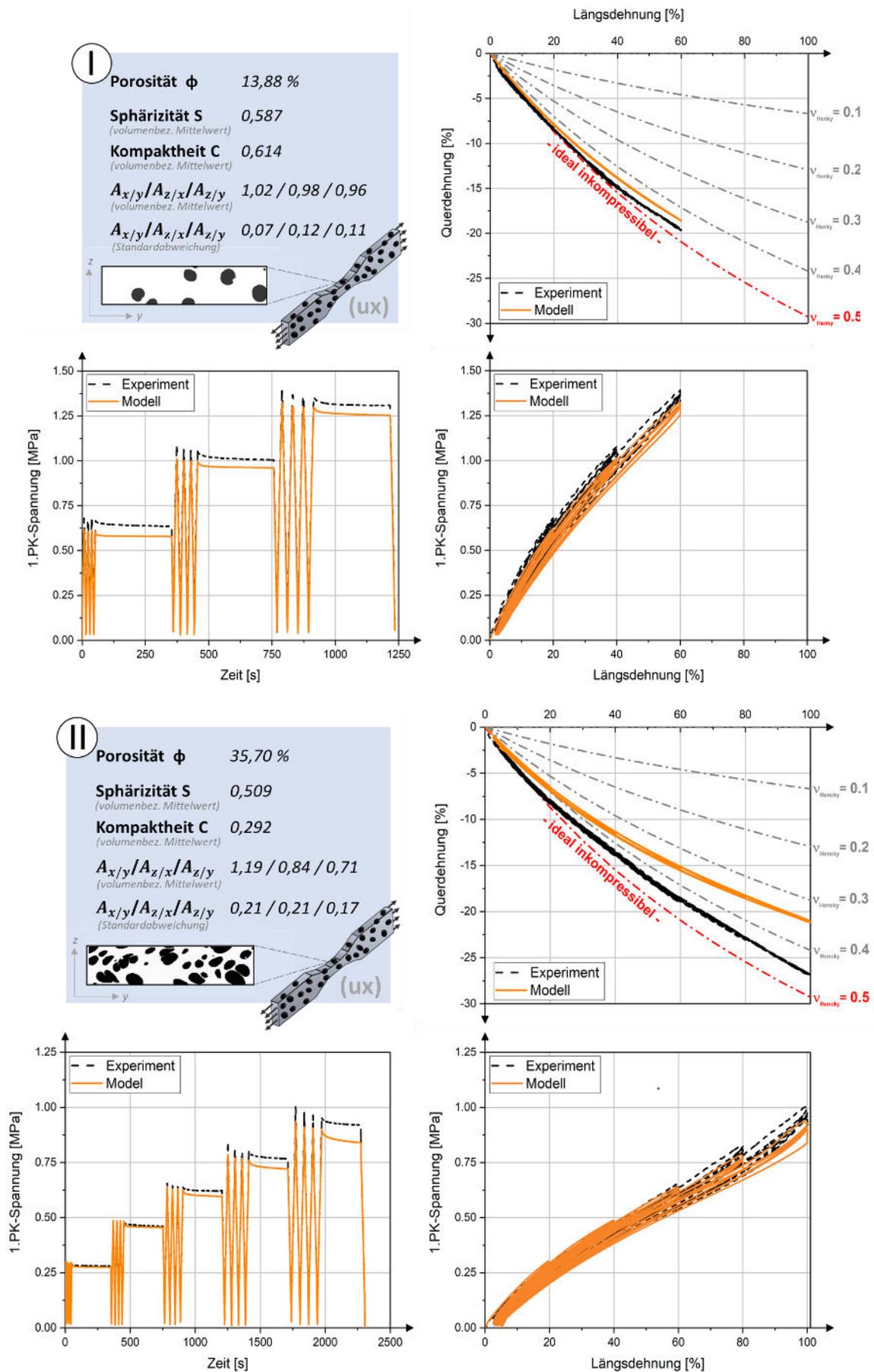


Abbildung 4.61: Ergebnisse der Validierung für Schaum I (DIK-4) und Schaum 2 (DIK-3); $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$

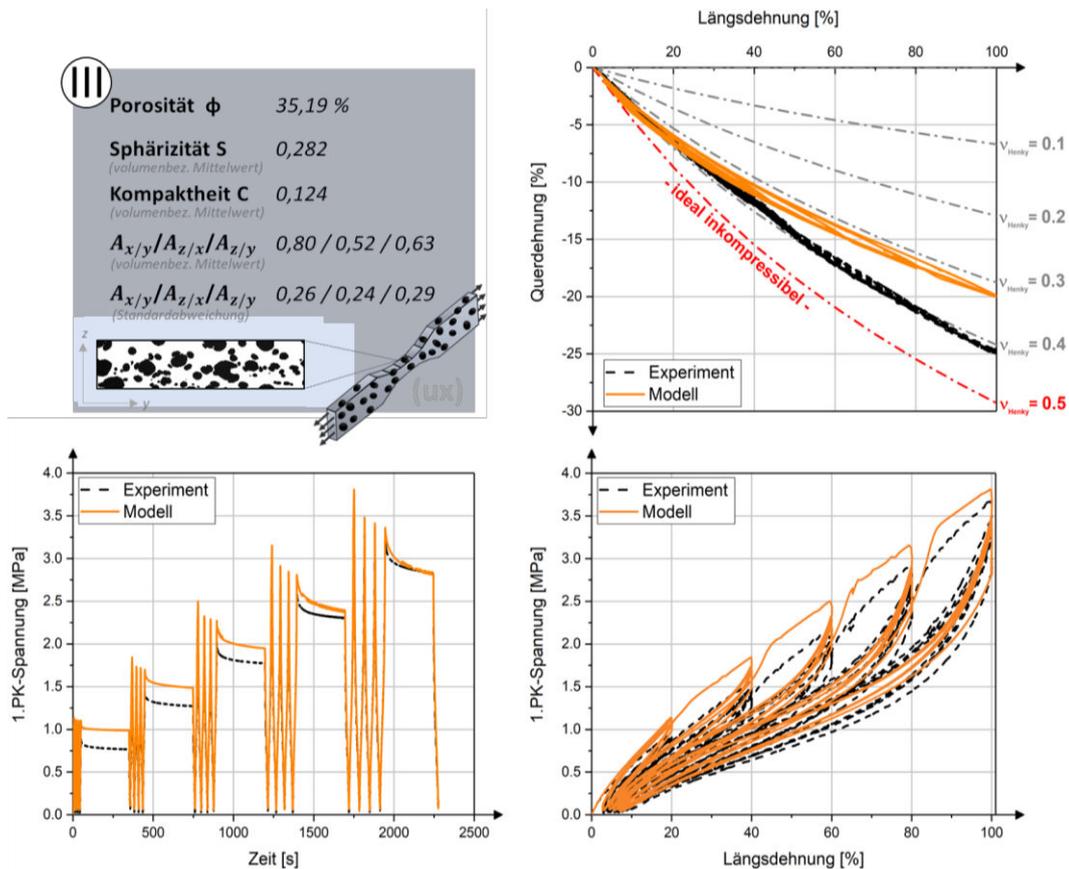


Abbildung 4.62: Ergebnisse der Validierung für Schaum III (DIK-2); $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$

Ein Vergleich der Spannungs-Zeit- und Spannungs-Dehnungs-Kurven zeigt grundsätzlich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation. Lediglich bei Schaumprobe III wird die Spannung vom Modell bei niedrigen Dehnungen moderat überschätzt. Diese Abweichung kann durch die vorliegende Mikrostruktur, welche hier am stärksten von der „Composite Spherical Assemblage“ abweicht, erklärt werden. Das viskoelastische Verhalten und der Mullins Effekt werden bei allen drei untersuchten Schäumen zufriedenstellend vorausgesagt. Dies wird insbesondere bei Betrachtung der Ergebnisse der stark inelastischen Schaumprobe III deutlich, welche zeigen, dass sowohl das Relaxationsverhalten als auch die Hysterese ausgesprochen gut abgebildet werden.

Die Querdehnung wird vom Modell bei allen untersuchten Schäumen unterschätzt, wobei an dieser Stelle nochmals auf mögliche Messungenauigkeiten im Experiment hingewiesen werden soll. Dieses Fehlverhalten könnte mit einem höheren initialen Gasdruck $p_{abs,0}$ korrigiert werden, welcher für die vorliegende Modellvalidierung ohnehin lediglich geschätzt wurde. Inwieweit die Abweichung tatsächlich von einem falsch approximierten Gasdruck verursacht wird, müssten weitergehende Untersuchungen zeigen. Tatsächlich könnten nämlich auch andere Modellannahmen zu der vorliegenden Abweichung führen.

4.5.5.2 Druckversuche

Neben Zugversuchen wurden die DIK-Eigenherstellungen uniaxialen Druckversuchen unterzogen. Im ursprünglichen Projektplan war eine Untersuchung des Druckverhaltens anhand von FE-Modellen vorgesehen, deren Geometrie aus den CT-Aufnahmen der Schäume stammt. Eine realistische Modellierung des Beulens und des Eigenkontakts war mit dem am DIK

verfügbaren FE-Tools in einem angemessenen zeitlichen Rahmen jedoch nicht möglich, weswegen ersatzweise experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden sind. Hierfür wurden die in AP 2 hergestellten geschäumten Zylinder zwischen zwei Aluminiumplatten mit identischer Ausrichtung gestellt und weggesteuert zusammengefahren. Im Prüfkörper liegt jedoch nur ein reiner uniaxialer Druckzustand vor, wenn keine Reibung an den Kontaktflächen auftritt. Aufgrund dessen wurden die Grundflächen des geschäumten Zylinders zum Zwecke der Minimierung des Reibwiderstandes mit einem Gleitmittel benetzt. Es sei jedoch angemerkt, dass bei der Versuchsführung eine deutliche Ausbauchung der Prüfkörper beobachtet wurde. Dies ist die Folge einer behinderten Querdehnung an den Kontaktflächen, wonach im Prüfkörper beim Versuch nicht der erwünschte uniaxiale Deformationszustand vorlag. Die Ergebnisse der Simulation, die in Abbildung 4.63 den Ergebnissen aus dem Experiment gegenübergestellt sind, wurden jedoch auf Grundlage der Annahme eines perfekten uniaxialen Druckzustands ermittelt. Des Weiteren wurde bei der vorgenommenen Untersuchung die Porenform mit $c_A = 1$ und die Ratenabhängigkeit durch Verwendung eines hyperelastischen Modells für die Elastomermatrix vernachlässigt. Dementsprechend wurde im Experiment mit $0,185 \text{ \%}/\text{s}$ eine sehr niedrige Dehnrates gewählt, um möglicherweise auftretende viskose Effekte zu minimieren.

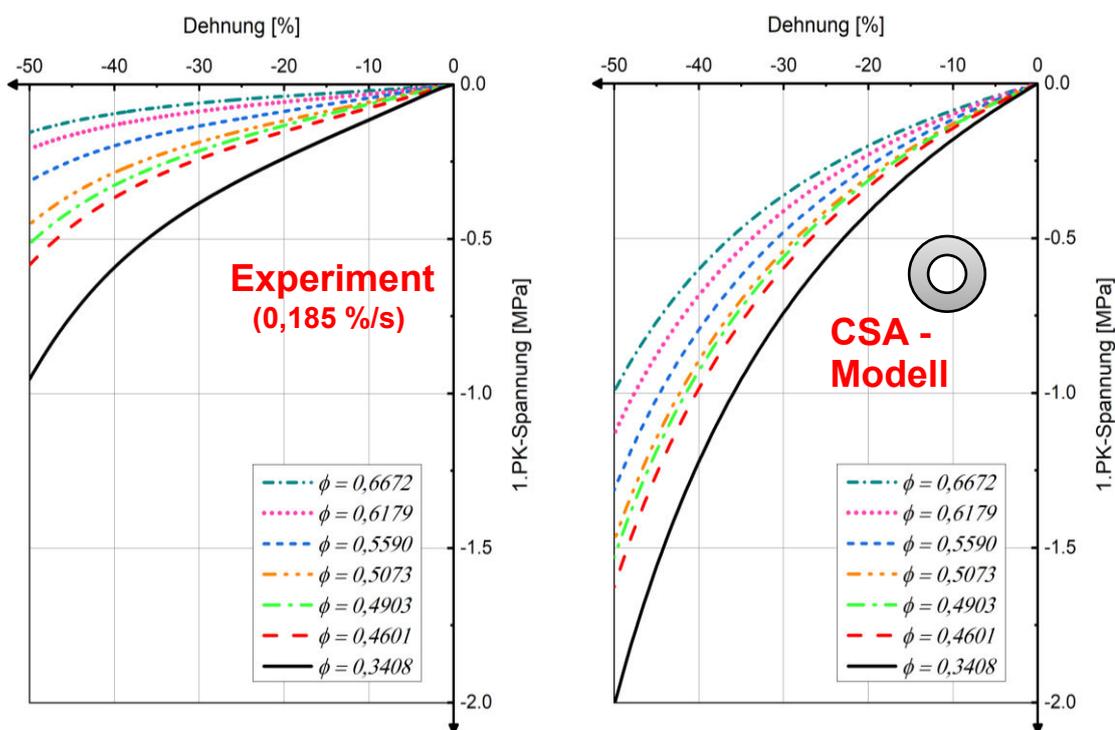


Abbildung 4.63: Spannungs-Dehnungskurve im uniaxialen Druckversuch - DIK-Schäume; Experiment (li.); Modell mit Yeoh-Parametern für Material „DIK-3“ (re.)

Der Vergleich von Modell und Experiment zeigt eine wesentlich zu steife Modellvoraussage, wobei die relative Abweichung sowohl mit zunehmender Porosität als auch mit zunehmender Druckdehnung anwächst. Diese Diskrepanz kann im Wesentlichen auf mikroskopische Beuleffekte zurückgeführt werden, welche beim vorliegenden Modell vernachlässigt worden sind. Da die Abweichung mit steigender Druckdehnung graduell anwächst, ist davon auszugehen, dass die einzelnen Porenwände mit zunehmender Druckdeformation sukzessive beulen. Demgegenüber zeigen vor allem offenporige Schäume einen sogenannten „Inflection Point“, an dem es zu einem schlagartigen Beulen vieler Porenwände im Schaum kommt. In Anbetracht der Tatsache, dass die Abweichung bereits bei sehr niedrigen Dehnungen auftritt, ist die

Anwendbarkeit des Modells bei mechanischen Problemen, bei denen Druckdeformationen auftreten, grundsätzlich kritisch zu hinterfragen.

4.6 AP 7: Bauteiluntersuchungen und -simulation (DIK + PbA)

4.6.1 Geschäumte Dichtung der Meteor GmbH

Um das Materialmodell und dessen Implementierung in dem FE-Programm MSC Marc zu testen, ist eine experimentelle Validierung anhand eines Beispiels aus der industriellen Praxis vorgenommen worden. Das untersuchte Bauteil entsprach dabei einer Autotürdichtung der Firma Meteor, welche einem Druckversuch unterzogen worden ist. Dieser Dichtungstyp wird zwischen Rohkarosserie und Fahrzeugtür eingesetzt, um den Innenraum thermisch zu isolieren und vor Umwelteinflüssen wie Feuchtigkeit zu schützen. Um die Funktionalität der Dichtung zu gewährleisten, muss ein ausreichend großer Schließdruck vorliegen, welcher der Anforderung einer für den Anwender komfortableren möglichst niedrigen Schließkraft gegenübersteht. Aufgrund dessen ist eine Auslegung, bei welcher der Mindestschließdruck nur geringfügig überstiegen wird, wünschenswert.

Das Schließverhalten der vorliegenden Dichtung wurde dabei zunächst experimentell in den Laboratorien der Meteor GmbH untersucht, wobei der Versuchsaufbau in Abbildung 4.64 dargestellt ist. Die verwendete Dichtung weist dabei ein sogenanntes hybrides Profil auf, welches sowohl aus Vollmaterial als auch aus Moosgummi besteht. Ein Stahlprofil im Inneren der Dichtung dient dabei der zusätzlichen Versteifung.

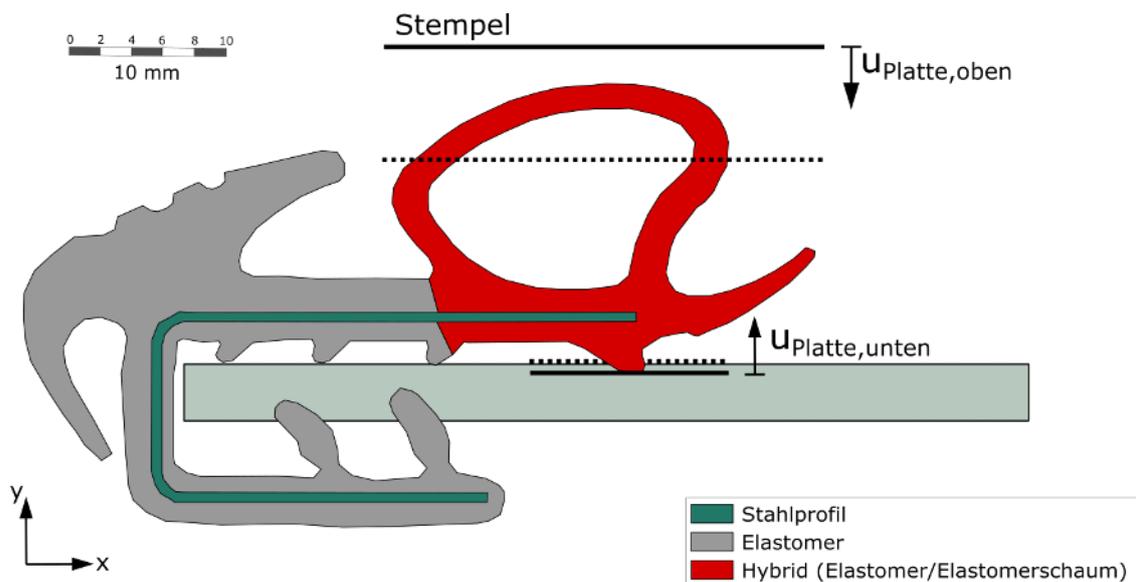


Abbildung 4.64: Versuchsaufbau und Geometrie des untersuchten Profils

Ein 100 mm langes Teilstück des extrudierten Profils wurde für das Experiment auf eine Halterung gesteckt und die Belastung durch eine schließende Autotür mittels eines in y -Richtung verfahrenen Stempels nachgestellt. Die Stempelkraft in y -Richtung wurde hierbei während des Versuchs mit einer am Stempel angeschlossenen Kraftmessdose gemessen. Der Fahrweg des Stempels entsprach $7,6\text{ mm}$, wobei die Maximalposition in Abbildung 4.64 mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet ist. Der Stempelweg, der bei den zwei vorgenommenen Versuchen (Versuch I und II) gefahren worden ist, ist Tabelle 4.17 zu entnehmen.

Phase	Anzahl	Randbedingung
Einbau	1 x	$u_{\text{Platte,unten}}$ auf Maximalpos.
Zyklus	5 x	$\dot{u}_{\text{Platte,oben}} = 50 \text{ mm/min}$ auf Maximalposotion und zurück
Relaxationsphase	1 x	$\dot{u}_{\text{Platte,oben}} = 500 \text{ mm/min}$ auf Maximalposotion und 600s halten

Phase	Anzahl	Randbedingung
Einbau	1 x	$u_{\text{Platte,unten}}$ auf Maximalpos.
Relaxationsphase	1 x	$\dot{u}_{\text{Platte,unten}} = 500 \text{ mm/min}$ auf Maximalposition und 600 s halten

Tabelle 4.17: Fahrweg und -geschwindigkeit des Stempels bei Versuch I (li.) und Versuch II (re.)

Das Aufstecken der Dichtung entspricht hierbei der Phase „Einbau“, bei welcher die untere Lippe des hybriden Teils durch das Aufstecken von der Halterung nach oben gedrückt wird.

Für eine Porositätsbestimmung auf Basis des Massen-/Volumenverhältnisses einer definierten Geometrie wurde ein nahezu quaderförmiger Abschnitt der Dichtung ausgestanzt und schließlich ein Porenvolumenverhältnis von 32,8% ermittelt. Die aus der physikalischen Dichtemessung stammende Porosität wurde schließlich als Referenzwert für die Segmentierung eines CT-Bilds eines 8 mm langen Abschnitts der Dichtung genutzt. Um eine gegebenenfalls inhomogene Verteilung des Porenvolumenanteils innerhalb des Profils zu erfassen, wurde die Dichtungsgeometrie anschließend in 5 Segmente zerlegt, für welche die Porosität aus den CT-Daten jeweils einzeln bestimmt wurde. Eine Übersicht zu den gemessenen Porenvolumenverhältnissen ist in Abbildung 4.65 gegeben. Es ist ersichtlich, dass die Porosität in einem stark gekrümmten Segment der Dichtung im Vergleich zum Referenzwert um etwa 6% erhöht ist.

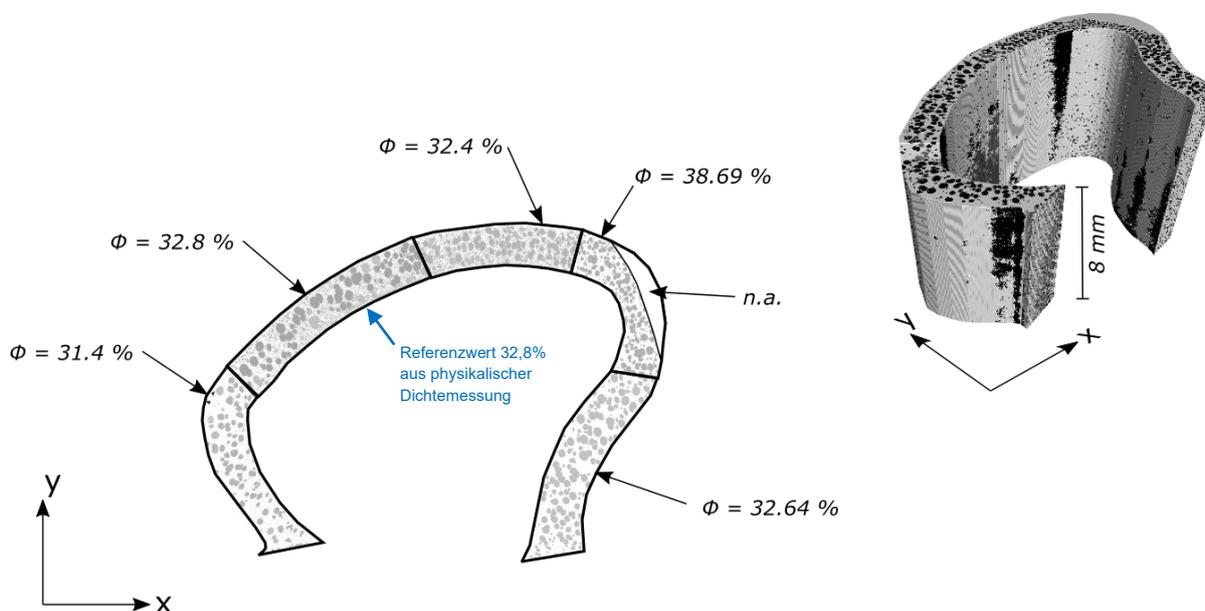


Abbildung 4.65: CT-Scan des Moosgummi-Teils der hybriden Dichtung und ermittelte Porenvolumenverhältnisse

Diese Inhomogenität wurde auch beim Aufbau des FE-Modells, welches in Abbildung 4.66 dargestellt ist, berücksichtigt. Für den Zweck einer Reduktion des numerischen Aufwands wurde nur ein Teil („hybrider Teil“ in Abbildung 4.64) der Gesamtdichtung betrachtet, wobei die Modellierung des Übergangs zum Restprofil unter der Annahme eines starren nicht beweglichen Stahlprofils (siehe Abbildung 4.64) erfolgt.

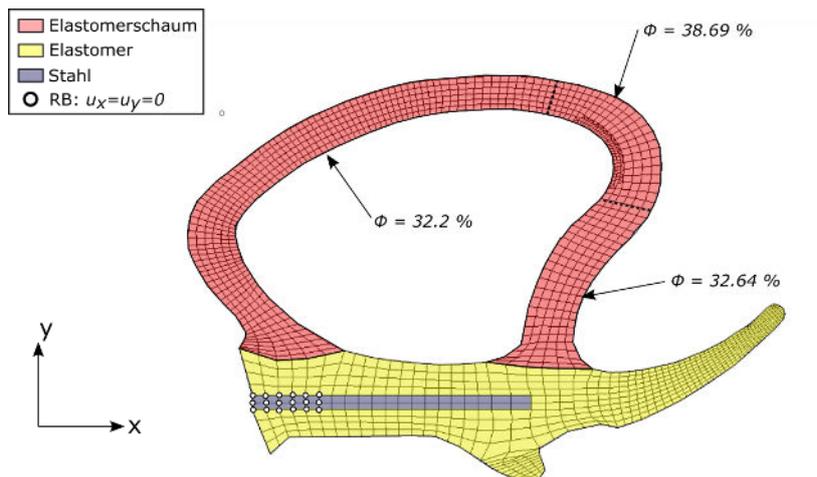


Abbildung 4.66: FE-Modell der untersuchten Dichtung

Für die Simulation wurde die Geometrie unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustands mit zweidimensionalen 3- und 4-Knoten-Elementen vernetzt. Diesen wurden die Elementtypen „6“ und „11“ zugewiesen, welche in MSC Marc voll-integrierten Elementen mit (bi-)linearen Ansatzfunktionen entsprechen. Für das Stahlprofil wird ein linear-elastisches Materialmodell mit den Materialkennwerten $E = 210 \text{ GPa}$ und $\nu = 0,3$ genutzt. Die Randbedingung für den Kontakt der Dichtung mit der unteren und der oberen Platte wurde mit einem Reibkoeffizienten von $\mu = 0,8$ realisiert. Da die Auswertung der CT-Aufnahme des Profils eine hohe durchschnittliche Sphärizität der enthaltenen Poren ergab, wurde für das Porenseitenlängenverhältnis $c_A = 1$ gewählt.

Für einen ersten Vorversuch wurde ein S2-Prüfkörper mit einer Porosität von $\phi = 32,3\%$ aus dem geschäumten Teil der Dichtung ausgestanzt. Ein Vergleich der im Anschluss bei einem Multistep-Mulihysterese-Zugversuch aufgenommenen experimentellen Daten mit der Modellvoraussage ergab dabei eine zufriedenstellende Übereinstimmung. Es sei angemerkt, dass, wie auch in Abbildung 4.67 zu erkennen, insbesondere das Relaxationsverhalten sehr gut vom Modell beschrieben wird.

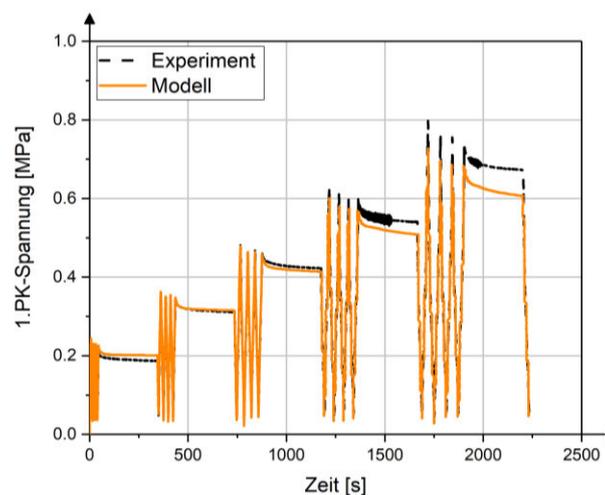


Abbildung 4.67: Spannungsantwort aus Experiment und Modell bei einem uniaxialen Multistep-Mulihysterese-Versuch mit einer ausgestanzten, geschäumten Probe ($\phi = 32,3\%$)

Anschließend wurden die Simulationen der Versuche I und II, also der Druckversuche mit der vollständigen Dichtung, durchgeführt. Die Rechenzeiten lagen bei der Nutzung eines Kerns des Rechnersystems des DIK (CPU: Intel Xeon E-5-2620) bei 356,8 h für Versuch I und 71,3 h für Versuch II.

Die im Experiment und in der Simulation aufgenommene Stempelkraft werden in Abbildung 4.68 zunächst für den ersten Zyklus des Versuchs I isoliert betrachtet. Die Simulation wurde dabei nicht nur mit dem im Projekt entwickelten Modell, sondern ebenfalls mit zwei weiteren Materialmodellen durchgeführt, die jedoch beide keine inelastischen Effekte abbilden können. Zum einem wurde das am DIK entwickelte Yeoh-Raghunath-Modell [38] genutzt, zum anderen der Danielsson-Ansatz mit einem Yeoh-Potential für das Matrixmaterial. Die Parameteranpassung wurde bei beiden Modellen an der Erstbelastungskurve des Vollmaterials vorgenommen, wobei sich die Parameter $c_{10} = 0,300169$, $c_{20} = 0,011766$ und $c_{30} = 0,000166$ ergeben haben.

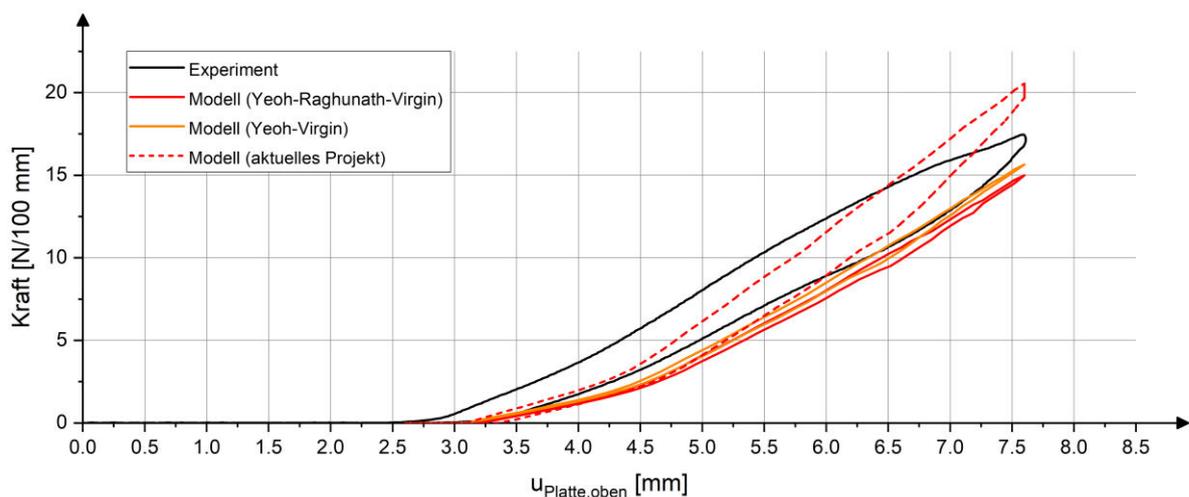


Abbildung 4.68: Stempelkraft in Experiment und Simulation für den ersten Zyklus von Versuch I

Abbildung 4.68 ist zu entnehmen, dass in Simulation und Experiment der Erstkontakt zwischen Stempel und Dichtung nicht ganz synchron erfolgt ist. Die Differenz von etwa 0,25 mm kann durch kleine geometrische Abweichungen zwischen dem realen Versuch und der simulierten Geometrie erklärt werden. Am Punkt der größten Verschiebung wurde im Experiment eine Kraft von 17,1 N / 100 mm gemessen. Die Kraft-Weg-Kurven der hyperelastischen Modelle zeigen ein im Vergleich zum Experiment tendenziell zu weiches Verhalten auf. Die Hysterese kann aufgrund der Vernachlässigung von dissipativen Prozessen im Material nicht zufriedenstellend abgebildet werden. Diese wird jedoch bei der Simulation mit dem im Projekt entwickelten Modell wesentlich besser erfasst, allerdings immer noch etwas unterschätzt. Bei niedrigem Fahrweg ($u_{\text{Platte,oben}} \lesssim 6,5$) wird die Stempelkraft von der Simulation (mit dem entwickelten Modell) unterschätzt, ansonsten überschätzt. Für den Deformationszustand zum Zeitpunkt des maximalen Fahrwegs ist die dominierende Hauptdehnung (siehe „major principal value of total strain“ in [39]) in deformierter Konfiguration zudem in Abbildung 4.69 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass sich in der Simulation, wie auch im Experiment, zwei Kontaktstellen ausbilden, wobei der Normalen-Anteil der Kontaktkraft an Stelle A 1,52 N / 100 mm und an Stelle B 19,22 N / 100 mm beträgt.

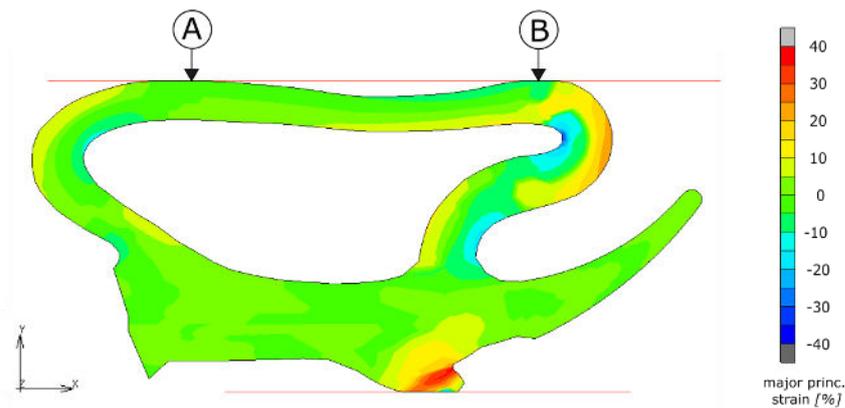


Abbildung 4.69: Dominierende Hauptdehnung bei $u_{Platte,oben} = 7,6$

Im Folgenden sollen nun alle Zyklen aus Versuch I im Kollektiv betrachtet werden. In Abbildung 4.70 sind die entsprechenden im Experiment aufgenommenen Kraft-Weg-Kurven dem Modell gegenübergestellt. Das steifste Verhalten tritt sowohl beim Experiment als auch in der Simulation bei der Erstbelastung der Dichtung auf, da hier das Material noch nicht infolge des Mullins Effekt erweicht ist. Sowohl im Modell als auch im Experiment zeigen die folgenden 4 Zyklen mit dem größtenteils bereits erweichten Material untereinander keine großen Abweichungen. Demnach kann das Modell den Einfluss von Mullins-Effekt zumindest qualitativ sehr gut abbilden.

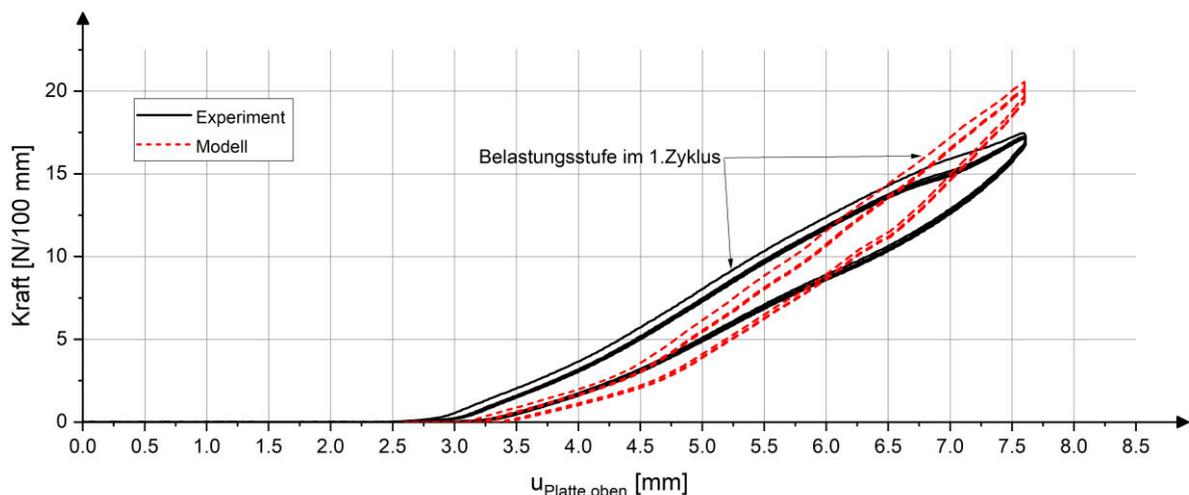


Abbildung 4.70: Stempelkraft in Experiment und Simulation für alle Zyklen von Versuch I

In einem letzten Schritt sollen nun die Relaxationsphasen bei der vorbelasteten (Versuch I) und erstbelasteten (Versuch II) Dichtung betrachtet werden. Die aufgenommenen Kraft-Zeit-Kurven in Abbildung 4.71 zeigen, dass die Vorbelastung nur einen sehr geringen Einfluss hat - sowohl im Experiment als auch in der Simulation. Das Modell antwortet jedoch stets mit einer größeren Kraft als im Experiment. Das zu steife Verhalten könnte hierbei von druckdeformierten Bereichen in der Dichtung verursacht werden, in welchen es im realen Bauteil zum Beulen der Porenwände kommt. In Kapitel 4.5.5 wurde bereits herausgestellt, dass das Modell selbst auf sehr niedrige Druckdehnungen wesentlich zu steif reagieren kann. Wie in Abbildung 4.69 dargestellt, treten nämlich Hauptdehnungen von bis zu -38% an der Außenhaut des Profils auf.

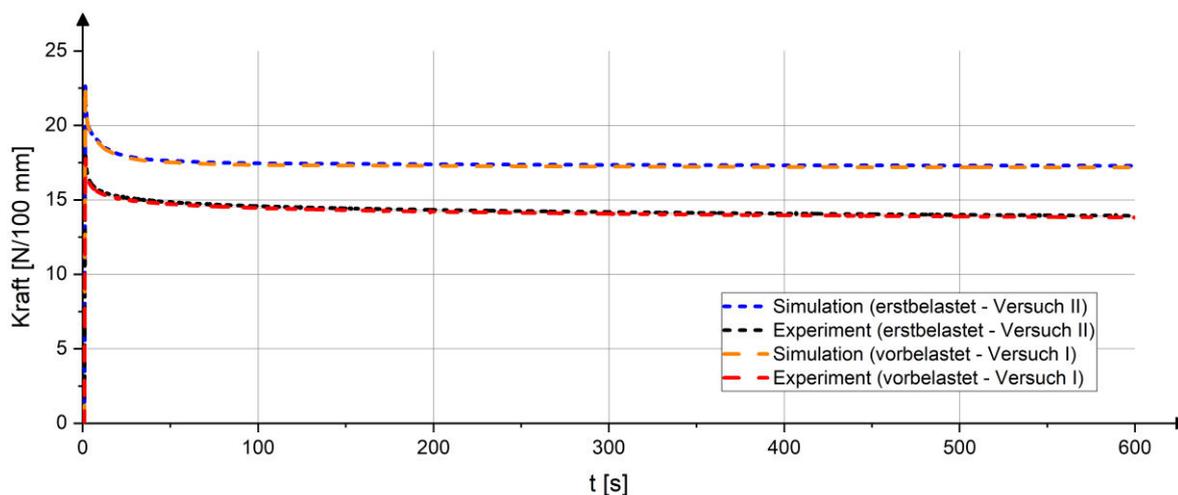


Abbildung 4.71: Vergleich des Relaxationsverhalten bei vor- und erstbelasteter Dichtung

4.6.2 Tischtennisschlägerbeläge der ESN GmbH

Die vom Projektpartner *ESN* bereitgestellten geschäumten Matten, welche als Belag in Tischtennisschlägern verwendet werden, wurden eingehend mechanisch charakterisiert. Es wurden sowohl Druck- als auch Zugversuche durchgeführt, welche als Grundlage für einen Vergleich mit der Modellvoraussage dienen.

4.6.2.1 Druckversuche

Da sich die geschäumten Matten als zu dünn für das Ausstanzen geeigneter Prüfkörper für uniaxialen Druck – wie etwa einem Zylinder – erwiesen, wurde ein Versuchsaufbau gewählt, bei dem der Deformationszustand ähnlich zur sogenannten „Confined Compression“ ist. Hierfür wurden die geschäumten Platten zwischen zwei zueinander planen Aluminiumscheiben gelegt, welche transversengesteuert zusammengefahren wurden. Je größer das Verhältnis von Probenfläche $a \cdot b$ zu Probenhöhe h ist, desto ähnlicher ist der Zustand zu einer uniaxialen Druckdeformation mit behinderter Querdehnung. Das Material kann aber vor allem an den freien Rändern in Querrichtung ausweichen, weswegen grundsätzlich kein homogener „Confined Compression“-Deformationszustand vorliegt. Da die geschäumten Platten in ihrer Dicke variieren, wurden die Prüfkörperlängen a und b und die Traversengeschwindigkeit $2,115 \cdot h \cdot 10^{-4}$ [1/s] in Relation zur Höhe h für eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse anpasst.

Es wurden vier Platten aus geschäumtem Material mit einer Porosität von 14,7%, 29,6%, 50,8% und 63,4% untersucht, sowie eine Vollmaterialplatte als Referenz. Die im Experiment aufgenommenen Kraft-Weg-Kurven sind der Abbildung 4.72 zu entnehmen. Eine höhere Porosität führt zu einem weicherem Verhalten, wobei die beiden Schäume mit der höchsten Porosität im Gegensatz zu den niedrigporösen Schäumen zwei Krümmungswechsel aufweisen. Der erste Krümmungswechsel bei $u/h \approx -12,5\%$ kann auf das Beulen der Porenwände zurückgeführt werden, welches makroskopisch zu einer Erweichung des Materials führt. Bei größeren Druckdeformationen ($u/h < -25\%$) kommt es schließlich zu einem weiteren Wechsel der Krümmung, wobei die zunehmende Versteifung des Schaums auf mikroskopische Kontaktvorgänge zurückzuführen ist. Dies deckt sich gut mit dem Resultat einer Vergleichsrechnung, bei welcher das enthaltene Porenvolumen unter der Annahme einer idealinkompressiblen Matrix und eines Zustands idealer „Confined Compression“ bestimmt wurde (vgl.

Abbildung 4.72 (unten rechts)). Demnach reduziert sich das enthaltene Porenvolumen beim Schaum mit einer Porosität von $\phi = 63,4\%$ während des Versuchs auf 3% seines Ursprungsvolumens.

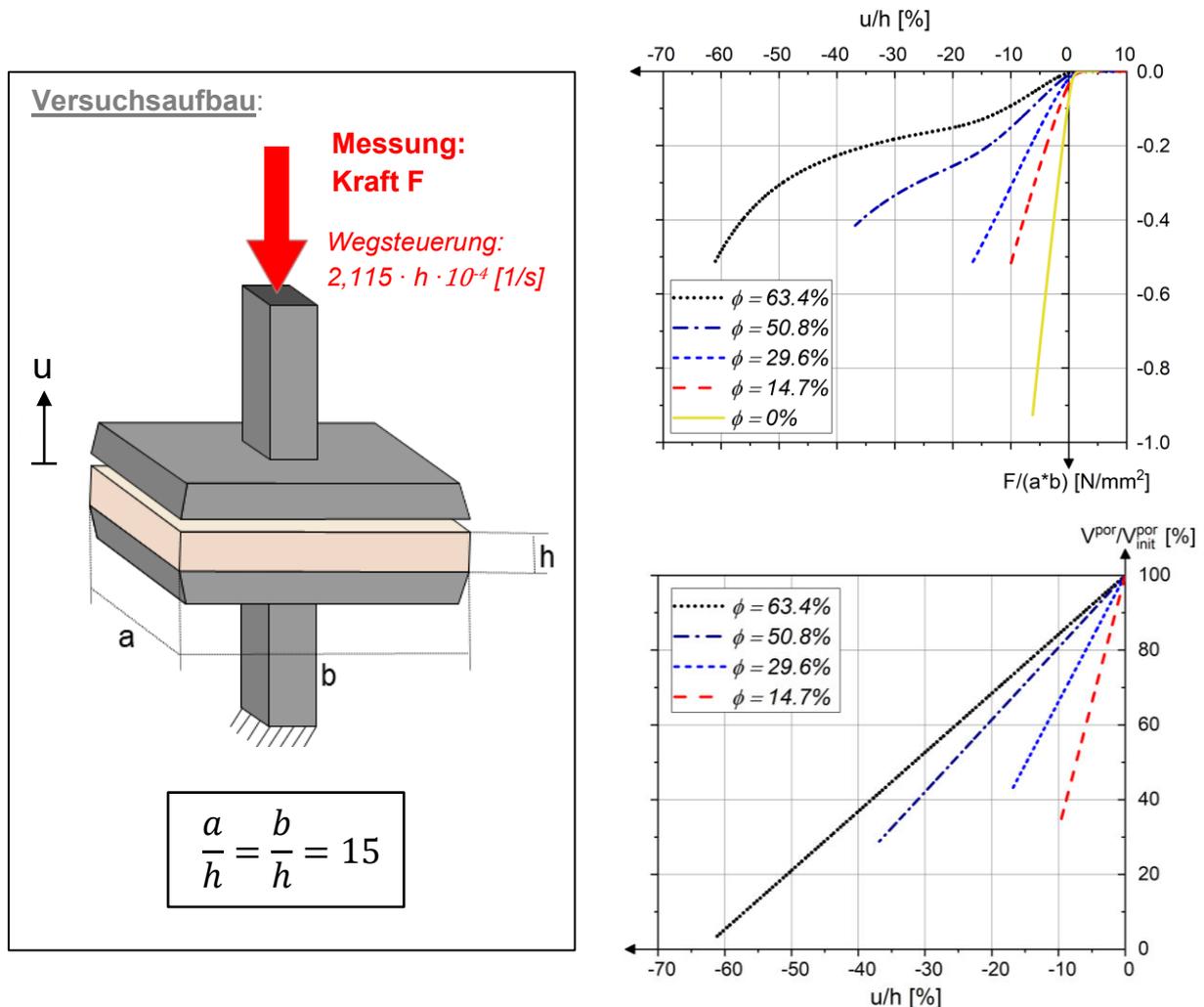


Abbildung 4.72: Versuchsaufbau (li.); gemessene Stempelkraft (ob.,re.); Abschätzung zum im Schaum enthaltenen Volumen (Annahme: Matrix ideal-inkompressibel; Axial Confined Compression) (un.,re.)

Für einen Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen wurde ein FE-Modell aufgebaut, bei welchem auf Grundlage der vorliegenden Symmetrie lediglich ein Viertel der geschäumten Platte betrachtet wird. Wegen des zu erwartenden, relativ inhomogenen Deformationszustands, wurde die Geometrie relativ fein vernetzt (HEX8). Als repräsentatives Volumenelement konnte aufgrund zu großer Rechenzeiten lediglich die Hohlkugel genutzt werden, obwohl die Poren, wie bereits in Kapitel 4.4.2 herausgestellt, teilweise eine sphäroide Form aufweisen. Für den Kontakt mit den Aluminiumplatten wurde ein Reibkoeffizient $\mu = 0,5$ gewählt, wobei Voruntersuchungen mit $0,3 \leq \mu \leq 0,8$ ergaben, dass der Einfluss auf die gemessene Kraft marginal ist.

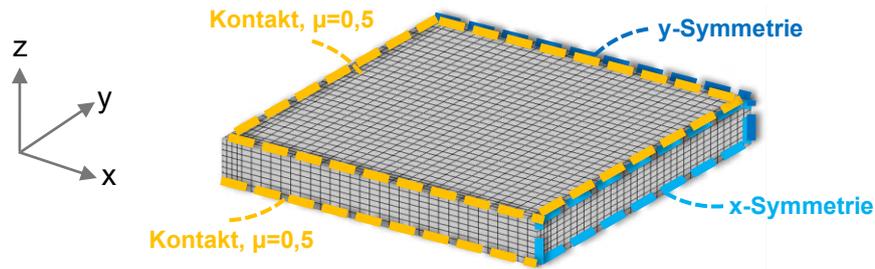


Abbildung 4.73: FE-Netz des Modells und gewählte Randbedingungen

Ein Vergleich zwischen der im Experiment und im Versuch gemessenen Stempelkraft ist für drei Schäume mit einer Porosität von 14,7%, 29,6% und 50,8% in Abbildung 4.74 gegeben. Das Modell zeigt ein wesentlich zu steifes Verhalten, da die Erweichung infolge des Porenwandbeulens nicht berücksichtigt ist. Bemerkenswert ist, dass diese Abweichung selbst bei sehr niedrigen Deformationen auftritt, was darauf hindeutet, dass das Beulen der Porenwände beim vorliegenden Schaum bereits bei sehr niedrigen Druckdeformationen auftritt.

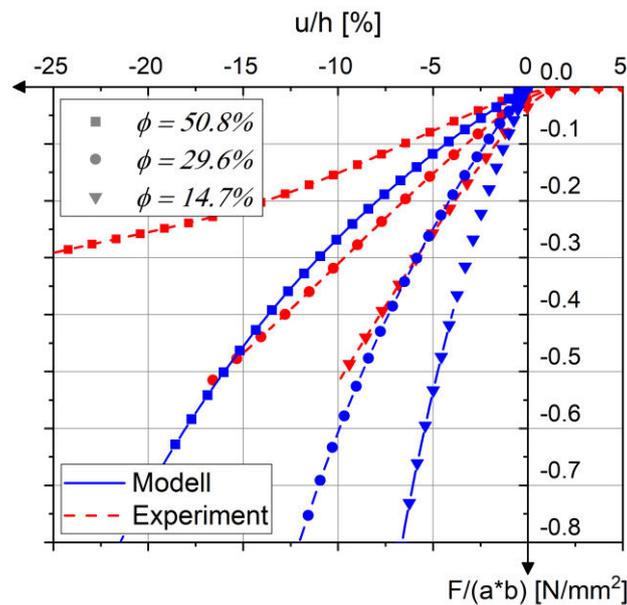


Abbildung 4.74: Stempelkraft in Simulation und Experiment

4.6.2.2 Identifikation der Mikrostrukturkennwerte

Die im folgenden Kapitel 4.6.2.3 an den ESN-Schäumen vorgenommenen Zugversuche sollen als Grundlage zur Validierung der Modellierung der poreninduzierten Anisotropie dienen. Hierfür müssen zunächst die Porenkennwerte p auf Basis der in AP 2 aufgenommenen CT-Bilder bestimmt werden.

Um den Rechenaufwand bei der Bestimmung der Porenkennwerte zu reduzieren, welcher bei der Verwendung des in AP 6 vorgestellten Algorithmus erheblich ist, wurde das Porenvolumenverhältnis im RVE auf die über Dichtemessungen bestimmte makroskopische Porosität festgesetzt. Da die Richtung des Auftreibens beim Expansionsverfahren bekannt ist,

wurde auch die z-Richtung als Vorzugsrichtung des Schaums fixiert. Demnach verbleibt lediglich das Porenseitenlängenverhältnis c_A als einziger zu fittender Mikrostrukturkennwert.

Die sich ergebende Zielfunktion der Optimierung ist für alle drei untersuchten Schäume in Abbildung 4.75 dargestellt. Das am Maximum auftretende Porenseitenlängenverhältnis entspricht dem gefitteten Parameter, welcher zusammen mit den festgesetzten Mikrostrukturkennwerten in Tabelle 4.18 aufgeführt ist. Eine graphische Darstellung der gefitteten RVE-Geometrien ist zudem Abbildung 4.77 zu entnehmen. Für einen Vergleich mit der Mikrostruktur des Schaums sind entsprechende Schnittbilder der CT-Aufnahmen in Abbildung 4.76 gegeben.

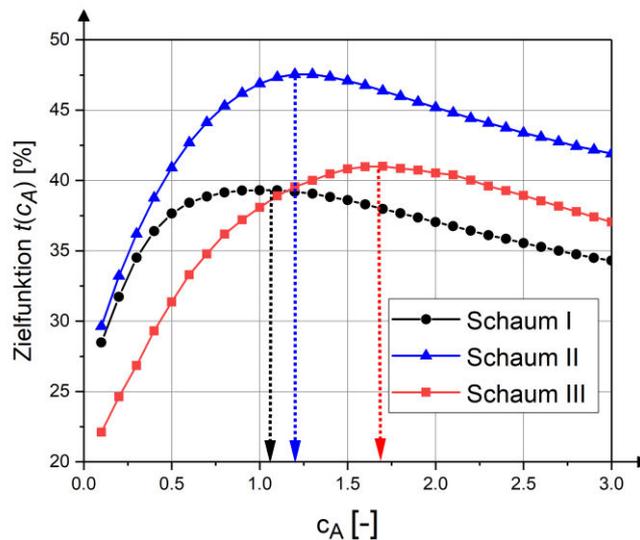


Abbildung 4.75: Zielfunktion $t(c_A, R_p(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{I}, \frac{|\Omega_{p,0}|}{|\Omega_{M,0}| + |\Omega_{p,0}|} = \phi_{\text{Dichtemessung}})$ der untersuchten ESN-Schäume

	Schaum I	Schaum II	Schaum III
$\frac{ \Omega_{p,0} }{ \Omega_{M,0} + \Omega_{p,0} }$	14,7 % (fixiert)	29,6 % (fixiert)	50,8% (fixiert)
$R_p(\zeta_1, \zeta_2)$	\mathbf{I} (fixiert)	\mathbf{I} (fixiert)	\mathbf{I} (fixiert)
c_A	1,04	1,21	1,71

Tabelle 4.18 Porenkennwerte p für die Zugversuche in Kapitel 4.7.2.3

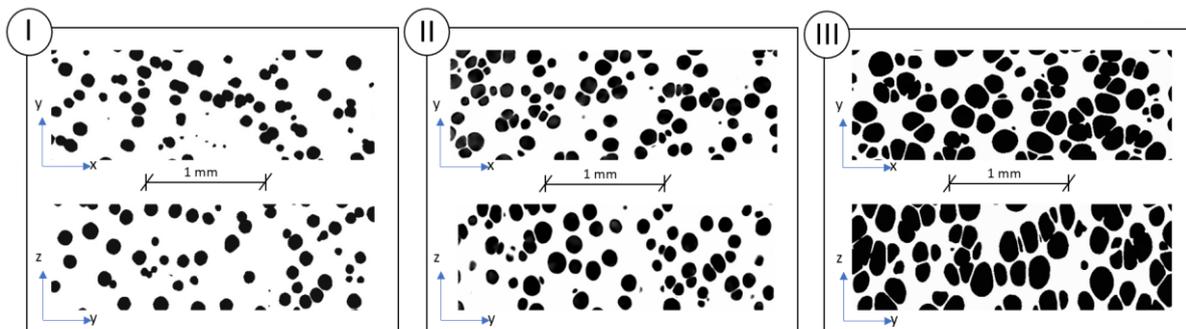


Abbildung 4.76: z- und x-Schnitt durch segmentiertes CT-Bild der untersuchten ESN-Schäume

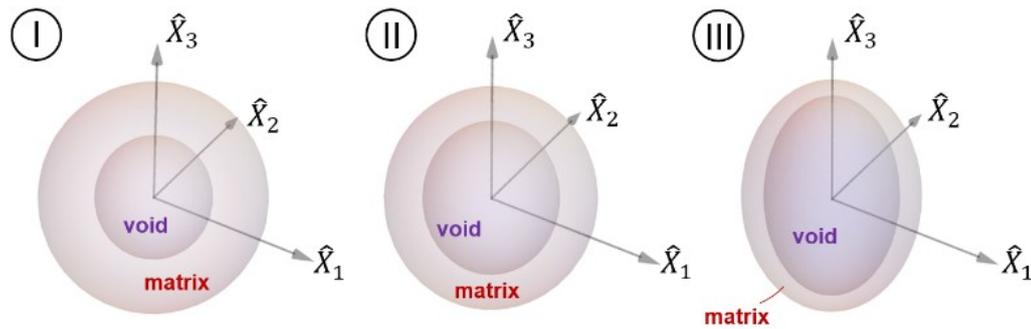


Abbildung 4.77: gefittete RVE-Geometrien der untersuchten ESN-Schäume

4.6.2.3 Zugversuche

Auf Grundlage der mit den ESN-Schäumen durchgeführten uniaxialen Zugversuche mit ausgestanzten S2-Zugstäben sollte untersucht werden, inwiefern die Modellerweiterungen für den Gasdruck und die poreninduzierte Anisotropie zu einer besseren Modellvoraussage führen. Die Zugrichtung entsprach hierbei im Experiment der x-Richtung (bzw. \hat{X}_1 -Richtung), womit orthogonal zur Vorzugsrichtung gezogen worden ist. Die dehnungsgeregelte Lastsequenz wies beim Versuch pro Laststufe drei Zyklen mit einer darauffolgenden 300s langen Relaxationszeit auf. Das Material zeigte jedoch keine ausgeprägten inelastischen Effekte. Es wurde ein internes Kamerasystem der Zugprüfmaschine (Zwick/Roell Z010) genutzt, um die Kontur des sich deformierenden S2-Zugstab während der Zugversuche aufzuzeichnen. Diese Aufnahmen wurden schließlich verwendet, um die Querdehnung im letzten Zyklus jeder Laststufe auszulesen. Da die Breite der Probe nur von etwa ca. 70 – 100 Pixeln aufgelöst wird und das Auslesen manuell erfolgt ist, sei auf die daraus folgenden Messungenauigkeiten hingewiesen.

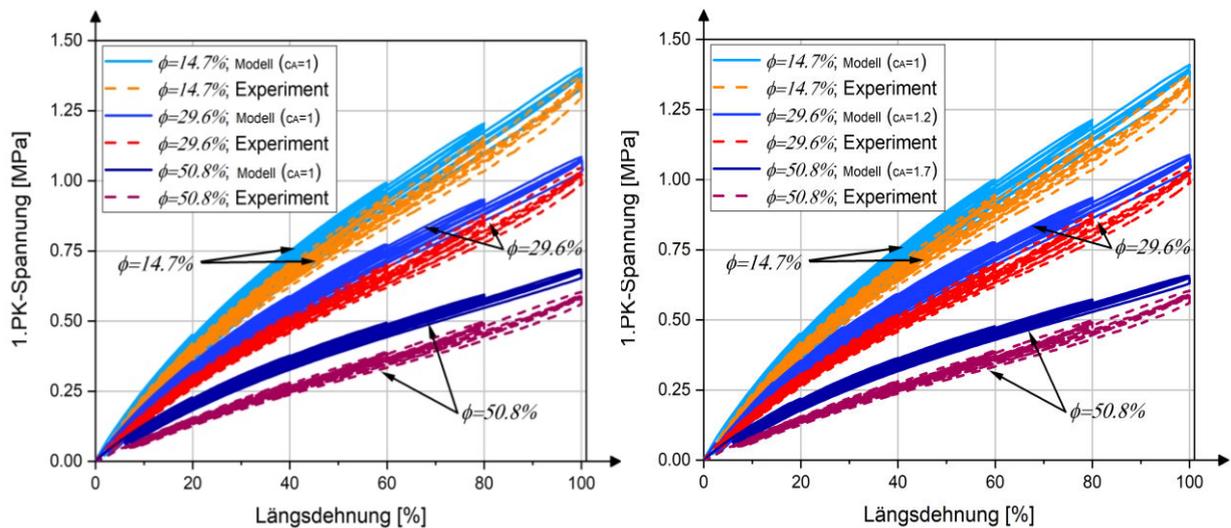


Abbildung 4.78: Spannungs-Dehnungskurven der Zugversuche (ESN-Schäume) für Modell und Experiment; ohne Berücksichtigung des Gasdrucks und der sphäroidalen Geometrie der Poren (li.); mit aktivem Gasdruckmodell und unter Berücksichtigung der sphäroidalen Geometrie der Poren (re.)

Die Simulationen wurden mit zwei Modellkonfigurationen durchgeführt: Bei der ersten Modellkonfiguration wurde das Porenseitenlängenverhältnis zu $c_A = 1$ gesetzt und der initiale absolute Gasdruck $p_{abs,0} = 0 \text{ MPa}$ gewählt, womit der Einfluss des Gasdrucks und der Porenform vernachlässigt sind. Demgegenüber werden diese bei der zweiten Modellkonfiguration mit $p_{abs,0} = 0,15 \text{ MPa}$ und den in Kapitel 4.6.2.2 ermittelten Mikrostrukturkennwerten berücksichtigt.

Bei Betrachtung der resultierenden Spannungs-Dehnungskurven in Abbildung 4.78, fällt auf, dass die Abweichung zwischen Modellvoraussage und Experiment mit steigender Porosität zunimmt. Dabei ist das Modellverhalten tendenziell zu steif, was mit den in Tabelle 4.16 aufgeführten Auswirkungen der Modellannahmen begründet werden kann. Die Berücksichtigung der Gasdruckmodellierung und der Porenform bewirkt eine moderate Verbesserung der Modellantwort, insbesondere beim hochporösen Schaum.

In Abbildung 4.79 ist die im Experiment gemessene Hencky-Querdehnzahl den beiden Modellkonfigurationen gegenübergestellt. Bei der Berechnung der Hencky-Querdehnzahl tritt im undeformierten Zustand eine Polstelle auf, welche bei niedrigen Längsdehnungen eine starke Streuung der Experimental- und Modelldaten verursacht. Ohne Berücksichtigung des Gasdrucks und der Porenanisotropie wird die Querdehnzahl vom Modell stark unterschätzt, wobei die Abweichung mit steigender Porosität des Schaums zunimmt. Im Vergleich dazu zeigt die erweiterte Modellkonfiguration ein Querdehnverhalten auf, welches sehr viel ähnlicher zur Messung aus dem Experiment ist. Die Übereinstimmung ist insbesondere beim niedrigporösen Schaum ($\phi = 14,7\%$) sehr gut.

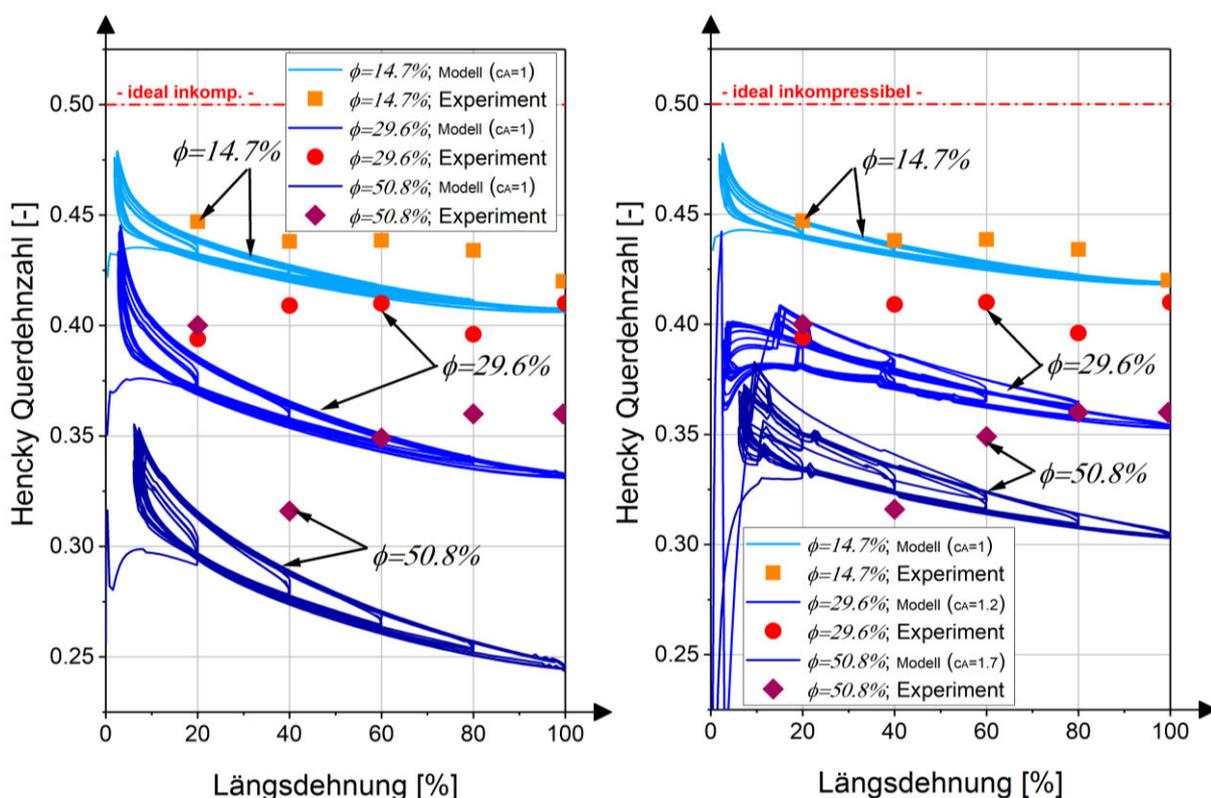


Abbildung 4.79: Bei den Zugversuchen aufgenommene Hencky-Querdehnzahl (ESN-Schäume) für Modell und Experiment; ohne Berücksichtigung des Gasdrucks und der sphäroidalen Geometrie der Poren (li.); mit aktivem Gasdruckmodell und unter Berücksichtigung der sphäroidalen Geometrie der Poren (re.)

5 Wissenschaftlich-technischer und wirtschaftlicher Nutzen

Produzierendes Gewerbe als auch dienstleistende Unternehmen, die sich mit der Herstellung, Verarbeitung, Bereitstellung oder ingenieurtechnischen Auslegung von geschäumten Elastomerbauteilen beschäftigen, können die erzielten Ergebnisse des Projektes in ihren Herstellungs-, Entwicklungs- und Berechnungsprozessen einbinden.

Durch das entwickelte Materialmodell kann insbesondere der Struktureinfluss der Mikrostruktur von Elastomerschäumen ohne eine umfassende Prüfkörperherstellung und anschließende experimentelle mechanische Charakterisierung nachvollzogen werden und so die Anzahl an Optimierungsschritten während einer Bauteilauslegung reduziert werden. Die durchgeführte FEM-Simulation einer Autotürdichtung und die Interpretation der Berechnungsergebnisse unter Berücksichtigung der Anwendungsgrenzen des Modells wurde exemplarisch durchgeführt. Der Prozess ist aber grundsätzlich bei beliebigen Bauteilen mit Komponenten aus geschäumten Elastomeren anwendbar.

Während die makromechanische Herangehensweise zur Spannungs-/ Dehnungsberechnungen unmittelbar von allen Firmen mit entsprechender FE-Software genutzt werden kann, benötigt die mikromechanische Berechnung der erzeugten repräsentativen Volumenelemente eine hohe Rechenkapazität, welche KMU aber auch vielen großen Unternehmen nicht zur Verfügung steht. Die ermittelten Resultate, insbesondere die Kennfelder für linear-elastisches Materialverhalten, können jedoch genutzt werden, um den Einfluss einzelner Strukturparameter auf das Deformationsverhalten abzuschätzen.

Mit der vorgestellten Mikrostrukturcharakterisierung anhand von Computertomographieaufnahmen wird Unternehmen ein Konzept zur Verfügung gestellt, mit dem ihr Produkt durch die Kenntnis der Mikrostruktur besser verstanden werden kann. Des Weiteren ergeben sich auch neue Möglichkeiten der Qualitätskontrolle innerhalb des Fertigungsprozesses, sodass veränderte strukturelle Parameter einzelner Chargen frühzeitig erkannt werden und der Produktionsprozess angepasst werden kann.

6 Verwendung der Zuwendung

Wissenschaftlich-technisches Personal (Einzelansatz A.1 des Finanzierungsplans)

- A.1 Wissenschaftliche/r Mitarbeiter/in: 18,65 PM (DIK)
- A.1 Wissenschaftliche/r Mitarbeiter/in (Projektleiter): 3,15 PM (DIK)
- A.1 Wiss.-techn. Mitarbeiter/in: 7,25 PM (DIK)
- A.1 Wissenschaftliche/r Mitarbeiter/in: 3,8125 PM (DIK)
- A.1 Wissenschaftliche Mitarbeiter/innen: 24,0 PM (Siegen)

Geräte (Einzelansatz B des Finanzierungsplans)

Es sind keine Ausgaben für Geräte gemäß dem Finanzierungsplan entstanden.

Leistungen Dritter (Einzelansatz C des Finanzierungsplans)

Es sind keine Ausgaben für Leistungen Dritter gemäß dem Finanzierungsplan entstanden.

Zu allen Arbeitspaketen liegen Ergebnisse vor:

- In AP 1 wurde eine umfassende Literaturstudie durchgeführt, deren Ergebnisse unter anderem in die Entwicklung des kontinuumsmechanischen Modells eingeflossen sind.
- In AP 2 wurden vier Mischungen (NR 25, NR 75, EPDM 25, EPDM 75) für die Vollmaterialproben und geschäumte Proben hergestellt. Mittels unterschiedlicher Verfahren (Expansions- und Treibverfahren) und Prozessparameter konnten Schäume mit unterschiedlichen Porenstrukturen erzeugt werden. Die Auswahl wurde um Prüfkörper und Bauteile der Projektpartner (SCHUECO KG, ESN Deutsche Tischtennis Technologie GmbH und Meteor GmbH) erweitert. Die mechanische Charakterisierung der Prüfkörper fand sowohl im DIK als auch in den Laboratorien der Projektpartner und der Uni Siegen statt. Eine Charakterisierung des volumetrischen Verhaltens wurde mittels Querdehnungsmessungen bei uniaxialen Zugversuchen realisiert.
- In AP 3 wurden mit einem an der Universität Siegen entwickelten Simulationstool computerbasiert Geometrien von Schäumen generiert. Mittels FE-Simulationen wurde schließlich der Einfluss von einzelnen Porenkennwerten auf das makroskopische Verhalten in einer Parameterstudie untersucht.
- In AP 4 wurden diverse in AP 3 generierte Schäume in vergrößerter Form additiv gefertigt. Es erfolgte eine mechanische Charakterisierung anhand von uniaxialen quasistatischen Druckversuchen.
- In AP 5 wurden die geschäumten Proben umfassend hinsichtlich ihrer Mikrostruktur charakterisiert. Die CT-Aufnahmen wurden sowohl mit kommerzieller Software (*VG Studio Max 3.4*) als auch mit einem Tool der Uni Siegen ausgewertet. Exemplarisch wurde zudem die Rekonstruierbarkeit des Porenvolumens aus einer 2D-Schichtaufnahme (eines Auflichtmikroskops) gezeigt.

- Die in AP 5 ermittelten Porenkennwerte dienten als Eingangsgröße für das in AP 6 entwickelte kontinuumsmechanische Modell. Dieses Modells kann an verschiedene Porenstrukturen mittels der Parameter Porenvolumenanteil und Porenseitenlängenverhältniss sowie der Ausrichtungswinkel der Pore angepasst werden. Darüber hinaus wurden diverse FE-Vergleichsrechnungen durchgeführt, um zu überprüfen, ob das RVE die Deformationen auf der Mikroebene realitätsnah abbildet.
- In AP 7 wurde das kontinuumsmechanische Modell und dessen Implementierung umfassend anhand von zwei Praxisbeispielen validiert. Hierzu diente eine Autotürdichtung der Firma Meteor GmbH und Tischtennisschlägerbeläge der ESN GmbH.
- AP 8 ist mit Erstellen des Abschlussberichts erfüllt.

Zusammengefasst ist zu bemerken, dass die kumulierten Arbeiten im Umfang den ursprünglich geplanten Aufwand deutlich überstiegen haben.

7 Notwendigkeit und Angemessenheit der geleisteten Arbeit

Die geleistete Arbeit entsprach dem Umfang des begutachteten und bewilligten Antrags und war daher für die Durchführung des Vorhabens notwendig und angemessen. Die an den beteiligten Forschungsinstituten durchgeführten Arbeiten ergaben sich aus den Arbeitspaketen und einem leicht modifizierten Arbeitsplan für dieses Forschungsprojekt, begründet durch neue Erkenntnisse aus der Literatur und fortschreitenden Untersuchungsergebnissen. Die zugewiesenen Mittel für die Personalkosten der wissenschaftlichen Mitarbeiter wurden innerhalb der Projektlaufzeit vom 01.03.2020 bis 31.05.2022 verbraucht.

8 Plan zum Ergebnistransfer in die Wirtschaft

Datum/Zeitraum	Maßnahme	Ziel/Bemerkung
16.07.2020 10.12.2020 16.07.2021 01.02.2022 31.05.2022	Treffen des projektbegleitenden Ausschusses	Informations- und Ergebnisaustausch, Abstimmung der Zielsetzung und des weiteren Vorgehens, Diskussion der Ergebnisse, Transfer der Ergebnisse an beteiligte Unternehmen
2022	Studentische Projektarbeiten	Heranführen von Studierenden an projektbezogene Themen, Transfer des Konzepts und der Ergebnisse an künftige Absolvierende: „M. Fischbach, „Numerische Untersuchung des Schwingungsverhaltens offenzelliger Schaumstrukturen,“ Masterarbeit, Universität Siegen, Freudenberg, 2022“
2020-2022	Wissenschaftliche Qualifikation der Mitarbeitenden	Dissertationen (im Entstehungsprozess)

2020-2022	Internetauftritt	Öffentliche Darstellung des Projekts und der erzielten Ergebnisse auf der Homepage des Deutschen Instituts für Kautschuktechnologie und der Universität Siegen
29.06.2021 07.09.2022	Internationale Vorträge auf Symposien und Fachtagungen	S. Siebert, N.H. Kröger, S. Buchen, T. Reppel, K. Weinberg; Modelling and experimental characterisation of cellular rubber considering inelastic material behaviour. DKG Elastomer Symposium. 29.06.2021 S. Siebert, J. Meier, P. Schneider, S. Buchen, K. Weinberg; Modeling and experimental characterization of cellular rubber considering inelastic effects and the microstructure's influence on the macroscopic mechanical behaviour. European Conference of Constitutive Modelling in Rubber, Mailand. 07.09.2022
27.06.2022 - 30.06.2022 08.11.2022- 10.11.2022	Poster bei Symposien und Fachtagungen	S. Siebert, A. Fehse, P. Schneider, S. Buchen, K. Weinberg, N.H. Kröger; Modelling and experimental characterisation of cellular rubber considering the microstructure's influence on the macroscopic mechanical behaviour. Deutsche Kautschuk Tagung – International Rubber Conference, Nürnberg. 27.06.2022 - 30.06.2022 S. Siebert, N-H. Kröger, J. Meier, P. Schneider; A transversally isotropic model for cellular rubber consisting of unidirectionally aligned pores. KHK 2022. 08.11.2022 -10.11.2022
23.11.2021	Vortrag vor Industrievertretern (Vereinsmitgliedern des DIK e.V.)	S. Siebert, J. Meier, A. Fehse, N.H. Kröger, S. Buchen, K. Weinberg; Modellierung und experimentelle Charakterisierung von Elastomerschäumen. DIK Elastomertag, Hannover. 23.11.2021
2021 2022	Veröffentlichungen in Fachzeitschriften	S. Buchen, N. Kröger, T. Reppel und K. Weinberg, Time-dependent modeling and experimental characterization of foamed EPDM rubber, Continuum Mechanics and Thermodynamics, Bd. 33, Nr. 4, pp. 1747-1764. 2021 L. Bogunia, S. Buchen und K. Weinberg, Microstructure characterization and

		stochastic modeling of open-cell foam based on μ CT-image analysis, GAMM-Mitteilungen, Bd. 45, p. e202200018. 2022
2022	Veröffentlichungen in Konferenzbänden	S. Siebert, J. Meier, P. Schneider, S. Buchen, K. Weinberg; Modeling and experimental characterization of cellular rubber considering inelastic effects and the microstructure's influence on the macroscopic mechanical behaviour. Constitutive Models in Rubber XII (eingereicht)
2021 2022	Zwischenberichte	Zwischenbericht für das Jahr 2020 Zwischenbericht für das Jahr 2021
2022	Abschlussbericht	Zusammenstellung der Forschungsergebnisse
27.06.2022 - 30.06.2022	Vorstellung des Projekts auf Fachmessen	Deutsche Kautschuk Tagung, Nürnberg. 27.06.2022 - 30.06.2022
2020-2022	Ausstellung von Demonstratoren in den Forschungsstellen	Verbreitung des Projektkonzepts und der Ergebnisse intern (Studierende, Mitarbeiter) und extern (Besucher, Firmen)
2022	Implementierung des Materialmodells für weitere Softwarepakete neben MSC Marc	Implementierung des Materialmodells für Simulia ABAQUS, um das Materialmodell einem möglichst breiten Spektrum an Anwendern bereitstellen zu können
2021 2022	Bereitstellung des Materialmodells (für Projektpartner)	Subroutine wurde an PbA übergeben
2021 2022	Fitting-Tool für Parameteridentifikation bei Schäumen	Tool wurde an PbA übergeben

Tabelle 8.1: Übersicht zu durchgeführten Transfermaßnahmen

Eine Übersicht zu den durchgeführten Maßnahmen bezüglich des Transfers der Projektergebnisse in die Wirtschaft ist in Tabelle 8.1 aufgeführt. Die geplanten Transfermaßnahmen folgen in Tabelle 8.2. Seitens der beteiligten Forschungseinrichtungen besteht Interesse, die geplanten Transfermaßnahmen durchzuführen, da die Dissertationsziele der projektbearbeitenden wissenschaftlichen Mitarbeiter/innen mit diesen zusammenhängen. Zudem möchten die Forschungseinrichtungen zukünftig an der Thematik des Projekts festhalten und weitere Fragestellungen, welche sich während der Projektbearbeitung ergaben, gemeinsam angehen. Der Kontakt zu den beteiligten KMU wird auch über die Projektlaufzeit hinweg andauern, da bei einer Vielzahl von Projekten, bei denen Bauteilen aus geschäumten Elastomeren simuliert werden sollen, eine regelmäßige Zusammenarbeit besteht. Somit sind die geplanten Transfermaßnahmen im avisierten Zeitrahmen realisierbar.

Datum/Zeitraum	Maßnahme	Ziel/Bemerkung
Ab Mitte 2022	Beratung bei der Entwicklung zum Produkt <i>(realisierbar)</i>	Unterstützung der Mitglieder des projektbegleitenden Ausschusses und weiterer Interessenten bei der Umsetzung der Ergebnisse in ein Produkt
Ab Mitte 2022	Vorträge auf Symposien und Fachtagungen <i>(bereits in Planung)</i>	K. Weinberg, Static and dynamic investigations of open-cell foam representative volumes, 92nd GAMM Annual Meeting, 2022, Aachen
Ab Mitte 2022	Wissenschaftliche Qualifikation der Mitarbeitenden <i>(realisierbar)</i>	Dissertationen
Ab Mitte 2022	Wissenstransfer an Anwender aus der Industrie <i>(realisierbar)</i>	Überlassung der Subroutinen für FEM-Programme inkl. Dokumentation Vorstellung im <ul style="list-style-type: none"> • AK Elastomerbauteile • AK Stoffgesetze
Ab Mitte 2022	Veröffentlichungen in Fachzeitschriften <i>(bereits in Planung)</i>	L. Bogunia, S. Buchen, M. Fischbach und K. Weinberg, Experiments on the dynamic Poisson's ratio of PUR foams, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2022 (akzeptiert)
2023	Vorstellung der Projektergebnisse auf Fachmessen <i>(realisierbar)</i>	Ergebnistransfer in die Wirtschaft auf der Hannovermesse 2023
Ab Mitte 2022	Bereitstellung von Demonstratormodellen <i>(realisierbar)</i>	Projektkonzept und Ergebnisse verbreiten, Unterstützung von Unternehmen bei der Vermarktung

Tabelle 8.2: Übersicht zu geplanten Transfermaßnahmen

9 Literatur

- [1] J. Ohser und K. Schladitz, 3D images of materials structures: processing and analysis, John Wiley & Sons, 2009.
- [2] M. Danielsson, D. M. Parks und M. C. Boyce, „Constitutive modeling of porous hyperelastic materials,“ *Mechanics of Materials*, Bd. 36, Nr. 4, pp. 347-358, 2004.
- [3] L. Bogunia, S. Buchen und K. Weinberg, „Microstructure characterization and stochastic modeling of open-cell foam based on μ CT-image analysis,“ *GAMM-Mitteilungen*, Bd. 45, p. e202200018, 2022.
- [4] N. Otsu, „A threshold selection method from gray-level histograms,“ *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, Bd. 9, Nr. 1, pp. 62-66, 1979.
- [5] M. Bargiel und J. Mościński, „C-language program for the irregular close packing of hard spheres,“ *Computer Physics Communications*, Bd. 64, Nr. 1, pp. 183-192, 1991.
- [6] J. Mościński, M. Bargiel, Z. A. Rycerz und J. P. W. M., „The Force-Biased Algorithm for the Irregular Close Packing of Equal Hard Spheres,“ *Molecular Simulation*, Bd. 3, Nr. 4, pp. 201-212, 1989.
- [7] P. Blatz und W. Ko, „Application of Finite Elastic Theory to the Deformation of Rubbery Materials,“ *Transactions of the Society of Rheology*, Bd. 6, p. 223–251, 1962.
- [8] R. W. Ogden, „Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory,“ *Proceedings of the Royal Society of*, Bd. 328, p. 567–583, 1972.
- [9] S. Jemioło und S. Turteltaub, „A Parametric Model for a Class of Foam-Like Isotropic Hyperelastic Materials,“ *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 67, Nr. 2, p. 248–254, 2000.
- [10] N. Koprowski-Theiß, Kompressible, viskoelastische Werkstoffe: Experimente, Modellierung und FE-Umsetzung, Saarbrücken: Universität des Saarlandes, Dissertation, 2011.
- [11] A. Matsuda, S. Oketani, Y. Kimura und A. Nomoto, „Effect of microscopic structure on mechanical characteristics of foam rubber,“ in *Constitutive Models for Rubber X*. London, London, Taylor & Francis Group, 2017, p. 575–579.
- [12] H. Wang, W. Hu und F. Zhao, „Numerical simulation of quasi-static compression on a complex rubber foam,“ *Acta Mechanica Solida Sinica*, Bd. 30, Nr. 3, p. 285–290, 2017.
- [13] Norm DIN EN ISO 1183-1: 2013-04. Kunststoffe - Verfahren zur Bestimmung der Dichte von nicht verschäumten Kunststoffen, 2013.
- [14] Norm DIN EN ISO 845: 2009-10. Schaumstoffe aus Kautschuk und Kunststoffen - Bestimmung der Rohdichte, 2009.
- [15] A. Ricker, „Masterarbeit: Experimentelle Untersuchungen und Erweiterung der kontinuumsmechanischen,“ Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, 2018.
- [16] L. Bogunia, S. Buchen, M. Fischbach und K. Weinberg, „Experiments on the dynamic Poisson's ratio of PUR foams,“ *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2022 (eingereicht).
- [17] ZIMT Universität Siegen, „Wissenschaftliches Rechnen, OMNI-Systeminformation,“ 2022. [Online]. Available: <https://cluster.uni-siegen.de/omni/system-information/>.
- [18] M. Fischbach, „Numerische Untersuchung des Schwingungsverhaltens offenzelliger Schaumstrukturen,“ Masterarbeit, Universität Siegen, Freudenberg, 2022.
- [19] L. J. Gibson und M. F. Ashby, Cellular solids: Structure and properties, 2. Aufl. Hrsg., Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [20] C. Reina, B. Li, K. Weinberg und M. Ortiz, „A micromechanical model of distributed damage due to void growth in general materials and under general deformation

- histories," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Bd. 93, Nr. 6, pp. 575-611, 2013.
- [21] S. Buchen, N. Kröger, T. Reppel und K. Weinberg, „Time-dependent modeling and experimental characterization of foamed EPDM rubber," *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Bd. 33, Nr. 4, pp. 1747-1764, 2021.
- [22] formlabs, „Materialfamilie der Kunstharze: Flexible und Elastic," [Online]. Available: <https://formlabs.com/de/materials/flexible-elastic/>.
- [23] *DIN 53504 Prüfung von Kautschuk und Elastomeren - Bestimmung von Reißfestigkeit Zugfestigkeit, Reißdehnung und Spannungswerten im Zugversuch*, 2017-03.
- [24] S. D. Wicksell, „The corpuscle problem: A mathematical study of a biometric problem," *Biometrika*, pp. 84-99, 1925.
- [25] T. Reppel, T.-F. Korzeniowski und K. Weinberg, „Stereological transformation of pore size distributions with application to soft polymer and FDM-printed specimens," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Artikel eingereicht)*, 2019.
- [26] MathWorks, „MathWorks Documentation Marker-Controlled Watershed Segmentation," [Online]. Available: https://de.mathworks.com/help/images/marker-controlled-watershed-segmentation.html?searchHighlight=watershed&s_tid=srchtitle_watershed_2.
- [27] J. Plagge, A. Ricker, N.-H. Kröger, P. Wriggers und M. Klüppel, „Efficient Modeling of Filled Rubber Assuming Stress-Induced Microscopic Restructurization," *International Journal of Engineering Science*, Bd. 151, p. 103291, 2020.
- [28] F. Sideroff, „Un modele viscoelastique non lineaire avec configuration intermediaire," *Journal de Mecanique*, Bd. 13, p. 679–713, 1974.
- [29] K. Seldan, Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen, Experimentelle Untersuchung und Modellbildung, Kassel: Dissertation, Berichte des Instituts für Mechanik (2/2001), Universität Gesamthochschule Kassel, 2001.
- [30] A. Shutov, R. Landgraf und J. Ihlemann, „An explicit solution for implicit time stepping in finite strain viscoelasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 256, pp. 213-225, 2013.
- [31] H. Hou und R. Abeyaratne, „Cavitation in Elastic and Elastic-Plastic Solids," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Bd. 40, Nr. 3, pp. 571-592, 1992.
- [32] A. Holzappel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, Chichester, New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [33] M. Gologanu, J. Leblond und J. Devaux, „Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities," *J. Mech. Phys.*, Bd. 41, p. 1723–1754, 1993.
- [34] R. Avazmohammadi und R. Naghdabadi, „Effective behavior of porous elastomers containing aligned spheroidal voids," *Acta Mech*, Bd. 224, p. 1901–1915, 2013.
- [35] M. Lewis, „A Robust, Compressible, Hyperelastic Constitutive Model for the Mechanical Response of Foamed Rubber," *TECHNISCHE MECHANIK*, Bd. 36, Nr. 1-2, pp. 88-101, 2016.
- [36] F.-L. Rivarola, G. Etse und P. Folino, „On Thermodynamic Consistency of Homogenization-Based Multiscale Theories," *Journal of Engineering Materials and Technology*, Bd. 3, p. 031011, 2017.
- [37] D. Kochmann, *Multiscale Modeling - Vorlesungsskript der ETH Zürich*, Zürich: Mechanics & Materials Lab, Institute of Mechanical Systems, Department of Mechanical and Process Engineering, 2022.
- [38] R. Raghunath und D. Juhre, „Finite element simulation of deformation behaviour of cellular rubber components," *Proc. Appl. Math. Mech.*, Bd. 12, p. 437 – 438, 2012.

- [39] MSC Software Corporation, *User Documentation: Volume A-E: Theory and User Information*, Newport Beach: MSC Software Corporation, 2017.
- [40] J. Plagge und M. Klüppel, „A physically based model of stress softening and hysteresis of filled rubber including rate- and temperature dependency,“ *International Journal of Plasticity*, Bd. 89, p. 173–196, 2017.
- [41] A. Lion, *Thermomechanik von Elastomeren*. Habilitationsschrift des Instituts für Mechanik der Universität Kassel, Kassel, 2000.